BERECHNUNG VON MAGNETISCHEN ABLENKSYSTEMEN

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines Doktors

der Naturwissenschaften

der Fakultät für Physik

der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von

WINFRIED SCHERLE

aus Onstmettingen

1983

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

BERECHNUNG VON MAGNETISCHEN ABLENKSYSTEMEN

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines Doktors

der Naturwissenschaften

der Fakultät für Physik

der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von

WINFRIED SCHERLE

aus Onstmettingen

1983

Tag der mündlichen Prüfung: 13. Oktober 1983

Dekan:	Prof. Dr. K.-H. Herrmann
1. Berichterstatter:	Prof. Dr. E. Kasper
2. Berichterstatter:	Prof. Dr. F. Lenz

Inhaltsverzeichnis

		Seite
1.	Einleitung	1
2.	Herleitung einer Integralgleichung zur Feldberechnung	4
2.1.	Voraussetzungen	4
2.2.	Herleitung der Integralgleichung	6
2.3.	Rotationssymmetrische Anordnungen	8
2.3.1.	Berechnung der Funktionen Φ_m und F_m für die speziellen Fälle m=0 und m=1	10
2.3.2.	Berechnung der Funktionen Φ_m und F_m für beliebige m	11
2.4.	Lösung der fouriertransformierten Integralgleichung mit einem Splineansatz	15
2.5.	Berechnung des Potentials und der Feldstärke im gesammten Raum	18
2.6.	Beispiele	21
2.6.1.	Analytische Testlösung	21
2.6.2.	Magnetische Rundlinse	21
2.6.3.	Magnetische Ablenksysteme	25
2.7.	Erweiterung des Verfahrens auf mehrere Gebiete	30
2.7.1.	Herleitung eines iterativen Verfahrens	30
2.7.2.	Praktisches Lösungsverfahren und Beispiele	32
3.	Berechnung des H_o-Feldes in Ablenksystemen	39
3.1.	H_o-Feld der meridionalen Stromverläufe	40
3.2.	Feldstärke eines azimutalen Stromverlaufs	44
3.3.	Erweiterung auf beliebige Wicklungsdichten	47

UNIV. LEIDEN BIBL.

4.	Bildfehlerdarstellung	50
4.1.	Einführung	50
4.2.	Grundannahmen	50
4.3.	Bildfehlerauswertung	58
4.4.	Beispiele	63
5.	Eigenschaften von magnetischen Ablenksystemen	67
5.1.	Ablenkeigenschaften und Bildfehler	67
5.2.	Justierfehler	77
5.3.	Einfluß der Induktivität auf den Spulenstrom	85
6.	Zusammenfassung	92
	Literatur	95
	Anhang	97

1. Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wird eine Integralgleichungsmethode zur Berechnung stationärer magnetischer Felder hergeleitet und ein Weg zu ihrer numerischen Lösung gezeigt. Feldberechnungen mit Hilfe von Integralgleichungsmethoden haben gegenüber Methoden der finiten Differenzen bzw. finiten Elemente einige Vorteile. Hervorzuheben sind die mathematische Klarheit der Methode, die Möglichkeit einer recht einfachen und schnellen Programmierung, die Genauigkeit und die Tatsache, daß keine künstlichen Gebietsbegrenzungen erforderlich sind. Bei der numerischen Lösung von Integralgleichungen ist man gezwungen, eine Diskretisierung durchzuführen. Dazu wird im Integrationsgebiet eine endliche Anzahl von Stützstellen festgelegt. In jeder dieser Stützstellen nimmt man einen zunächst unbekannten Wert für die Lösungsfunktion an, die im folgenden ein Potential sein wird. Zwischen den Stützstellen wird die Lösungsfunktion mit Hilfe der Werte in den Stützstellen und einem geeigneten Satz von Formfunktionen beschrieben. Die Lösung der Integralgleichung kann dadurch auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems zurückgeführt werden. Um bei hoher Genauigkeit die Stützstellenzahl gering zu halten, womit ein hoher Rechenzeitaufwand und ein hoher Speicherplatzbedarf vermieden werden, ist es günstig, Splinefunktionen als Formfunktionen zu wählen. Damit erreicht man mit wenigen Stützstellen eine hohe Genauigkeit.

Zur Feldberechnung mit Hilfe von Integralgleichungen sind schon eine große Anzahl von Arbeiten erschienen (z.B. Lucas 1976, Compumag-Tagungsband 1976, Fye 1979, und Iselin 1981,

wo sich weitere Zitate finden). Die in der vorliegenden Arbeit beschriebene Methode unterscheidet sich von früheren erstens durch den Ansatz, bei dem eine günstige Zerlegung des Gesamtfeldes in ein bekanntes, einfach zu berechnendes Wirbelfeld und ein über eine Integralgleichung zu berechnendes Gradientenfeld durchgeführt wird. Zweitens unterscheidet sie sich im Lösungsverfahren durch Verwendung des Splineansatzes. Bekanntlich ist ein beliebiges Vektorfeld, das im Unendlichen verschwindet, durch seine im Endlichen liegenden Wirbel und Quellen eindeutig bestimmt. Liegen zwei Medien unterschiedlicher Permeabilität und eine gegebene Stromverteilung vor, so erhält man den Wirbelanteil des Magnetfeldes durch Integration nach dem Biot-Savartschen Gesetz über die Stromverteilung. Für den Quellanteil, der durch ein Potential, also den günstigen Fall einer skalaren Größe beschrieben werden kann, erhält man eine Integralgleichung. Die Lösung dieser Integralgleichung ergibt das Potential auf der Trennfläche der beiden Medien. Anschließend wird gezeigt, wie man das Verfahren durch einen iterativen Prozeß auf mehrere Elektroden erweitern kann.

Um einen Anschluß an das erweiterte Kreisringverfahren (Kasper, Scherle 1982) herzustellen, spezialisieren wir uns auf den elektronenoptisch wichtigen Fall der rotationsymmetrischen Berandung. Durch Fourierzerlegung der Abhängigkeit des Potentials auf dem Rand von der azimutalen Koordinate erhält man magnetische Scheinladungen mit harmonischer Azimutabhängigkeit auf Ringen hinter dem Rand und kann somit das Potential im ganzen Raum berechnen.

Neben einigen Beispielen werden dann mit Hilfe der Integralgleichungsmethode Eigenschaften von magnetischen Ablenksystemen untersucht. Es werden Berechnungen und Abschätzungen an Toroid- und Sattelspulen durchgeführt.

Da bei Ablenksystemen der Elektronenstrahl den paraxialen Bereich verlassen kann, werden Bildfehler zweiter, dritter und auch höherer Ordnung relevant. Eine Abschätzung mit Hilfe von Aberrationskoeffizienten wird dann recht umfangreich und undurchsichtig und bildet deshalb bei der Auswertung und Bestimmung von Bildfehlern eine nicht zu unterschätzende Quelle für Rechenfehler. Ich leite deshalb einen etwas anderen Zugang zur Beschreibung des Bildfehlerscheibchens her, bei dem eine endliche Zahl von Lorentztrajektorien, d.h. Lösungen der Lorentzschen Bewegungsgleichung mit verschiedenen Anfangsbedingungen, ausgewertet wird.

2. Herleitung einer Integralgleichung zur Feldberechnung

2.1. Voraussetzungen

Im folgenden betrachten wir zwei Raumgebiete. Die beiden Gebiete sollen durch Medien mit den konstanten Permeabilitäten μ_1 beziehungsweise μ_2 ausgefüllt sein. μ_1 habe im folgenden stets den Vakuumwert μ_o. Im Gebiet 1 sei eine ortsabhängige elektrische Stromverteilung $\underline{j}(\underline{r})$ vorgegeben (siehe Fig.1). Da das Magnetfeld $\underline{H}(\underline{r})$ wegen $\underline{H}(\infty) = 0$ eindeutig durch seine im Endlichen liegenden Quellen und Wirbel bestimmt ist, zerlegen wir es gemäß:

$$\underline{H}(\underline{r}) = \underline{H}_o(\underline{r}) + \text{grad } V(\underline{r}) \; . \tag{2.1}$$

Dabei soll $\underline{H}_o(\underline{r})$ der reine Vakuumfeldanteil der Stromverteilung (d.h. bei Abwesenheit aller Medien) sein. $\underline{H}_o(\underline{r})$ erfüllt folglich die Beziehungen:

$$\text{rot } \underline{H}(\underline{r}) = \text{rot } \underline{H}_o(\underline{r}) = \underline{j}(\underline{r}) \tag{2.2a}$$

$$\text{div } \underline{H}_o(\underline{r}) = 0 \; . \tag{2.2b}$$

Mit der Zusatzforderung $\underline{H}_o(\infty) = 0$ folgt die Lösung bekanntlich aus dem Biot-Savartschen Gesetz:

$$\underline{H}_o(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\underline{j}(\underline{r}') \times (\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} \, d^3r' \; . \tag{2.3}$$

Da in beiden Medien konstante Permeabilität vorausgesetzt ist, gilt wegen $\underline{B}(\underline{r}) = \mu \underline{H}(\underline{r})$ und div $\underline{B}(\underline{r}) = 0$ die Laplacegleichung $\nabla^2 V(\underline{r}) = 0$ in beiden Medien, jedoch nicht auf der Trennfläche der beiden Gebiete, da sich auf ihr die magneti-

schen Scheinladungen als Quellen des Potentialfeldes befinden.

Wir setzen voraus, daß keine Oberflächenströme sind. Dann sind wegen rot $\underline{H}(\underline{r}) = 0$ die Tangentialkomponenten von $\underline{H}_o$ und grad V beim Durchdringen der Trennfläche stetig. div $\underline{B} = 0$ bedeutet die Stetigkeit der Normalkomponente von $\underline{B}$, woraus auf der Trennfläche:

$$\mu_2 \frac{\partial V}{\partial n}\Big|_2 - \mu_1 \frac{\partial V}{\partial n}\Big|_1 = -(\mu_2 - \mu_1)\ \underline{n}\cdot\underline{H}_o \qquad (2.4)$$

folgt. Aus der Stetigkeit der Tangentialkomponenten und aus der Tatsache, daß die Normalkomponente von grad V einen endlichen Sprung macht, folgt, daß das Potential im ganzen Raum stetig ist. $\frac{\partial}{\partial n}\Big|_i$ steht symbolisch für die Komponente der aus dem i-ten Gebiet zum Rand hin approximierten Richtungsableitung in Richtung der vom Gebiet 2 in das Gebiet 1 weisenden Oberflächennormale (siehe Fig.1).

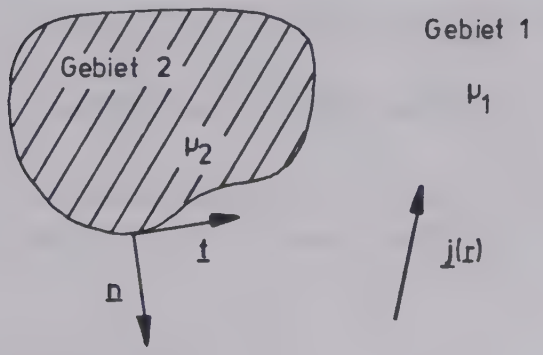

Fig. 1: Gebietseinteilung

2.2. Herleitung der Integralgleichung

Als Ausgangspunkt nehmen wir die bekannte Greensche Formel:

$$\iiint_G (u\nabla^2 w - w\nabla^2 u)\, d^3r = \oiint_{\partial G} (u \frac{\partial}{\partial n} w - w \frac{\partial}{\partial n} u)\, df . \quad (2.5)$$

Dabei ist ∂G die Oberfläche des Volumengebiets G. Nachfolgend sei $\underline{r}_1$ ein Punkt im Gebiet 1, $\underline{r}_2$ ein Punkt im Gebiet 2. Setzt man nun mit i=1,2:

$$u(\underline{r}') = G(\underline{r}_i, \underline{r}') = \frac{1}{4\pi} |\underline{r}_i - \underline{r}'|^{-1} \qquad \text{mit } \underline{r}_i \neq \underline{r}'$$

und $w(\underline{r}') = V(\underline{r}')$

in (2.5) ein, wobei sich Integration und Differentation jetzt auf die Variable $\underline{r}'$ beziehen sollen, so gilt mit:

$$\frac{\partial}{\partial n'} G = \frac{1}{4\pi} \underline{n}'(\underline{r}_i - \underline{r}')/|\underline{r}_i - \underline{r}'|^3$$

für i=1,2:

$$V(\underline{r}_1) = -\oiint_{\partial G} [G(\underline{r}_1, \underline{r}') \frac{\partial V}{\partial n}\Big|_1 - V(\underline{r}') \frac{\partial}{\partial n'} G(\underline{r}_1, \underline{r}')]\, df' \quad (2.6a)$$

$$V(\underline{r}_2) = \oiint_{\partial G} [G(\underline{r}_2, \underline{r}') \frac{\partial V}{\partial n}\Big|_2 - V(\underline{r}') \frac{\partial}{\partial n'} G(\underline{r}_2, \underline{r}')]\, df' \quad (2.6b)$$

Um eine Integralgleichung für das Potential auf der Grenzfläche zu erhalten, führen wir einen Grenzübergang durch. Zunächst gelte mit $\varepsilon \neq 0$:

$$\underline{r}_1 = \underline{r} + \varepsilon \underline{n} \quad (2.7)$$
$$\underline{r}_2 = \underline{r} - \varepsilon \underline{n}$$

Dabei ist $\underline{r}$ ein Punkt auf der Trennfläche der beiden Medien. Es gilt die Identität (siehe Anhang 1):

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \iint_{\partial G} \frac{\underline{n}\cdot\underline{n}'F(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}' \pm \varepsilon \underline{n}|^3} \, df' = 2\pi F(\underline{r}) \, . \qquad (2.8)$$

Dabei ist $\underline{n}$ der Normaleneinheitsvektor auf der Grenzfläche am Ort $\underline{r}$, $\underline{n}'$ der am Ort $\underline{r}'$. Wir führen nun in (2.6a) und (2.6b) den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ durch. Wenn wir von (2.8) bei der Auswertung der Terme

$$G(\underline{r} \pm \varepsilon \underline{n}, \underline{r}') = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\underline{n}'(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}' \pm \varepsilon \underline{n}|^3} \pm \frac{\varepsilon \, \underline{n}'\underline{n}}{|\underline{r}-\underline{r}' \pm \varepsilon \underline{n}|^3}\right]$$

Gebrauch machen, so erhalten wir:

$$\frac{1}{2} V(\underline{r}) = \mp \iint_{\partial G} \left[G(\underline{r},\underline{r}') \frac{\partial V}{\partial n}\Big|_i - V(\underline{r}') \frac{\partial}{\partial n'} G(\underline{r},\underline{r}')\right] df' \, , \qquad (2.9)$$

mit: $i=1,2$; $\underline{r} \in \partial G$

Multiplikation der i-ten der beiden Gleichungen (2.9) mit μ_i und Addition ergibt:

$$\frac{\mu_2+\mu_1}{2} V(\underline{r}) + (\mu_2-\mu_1) \iint_{\partial G} V(\underline{r}') \frac{\partial}{\partial n'} G(\underline{r},\underline{r}') \, df' = \iint_{\partial G} G(\underline{r},\underline{r}') \left(\mu_2 \frac{\partial V}{\partial n}\Big|_2 - \mu_1 \frac{\partial V}{\partial n}\Big|_1\right) df' \qquad (2.10)$$

Wegen (2.4) folgt daraus für $\underline{r} \in \partial G$ die Fredholmsche Integralgleichung 2. Art:

$$\frac{\mu_2+\mu_1}{2(\mu_2-\mu_1)} V(\underline{r}) + \iint_{\partial G} V(\underline{r}') \frac{\partial}{\partial n'} G(\underline{r},\underline{r}') \, df' = -\iint_{\partial G} G(\underline{r},\underline{r}') \, \underline{n}'\cdot\underline{H}_o(\underline{r}') \, df' \, . \qquad (2.11)$$

2.3. Rotationssymmetrische Anordnungen

Die in elektronenoptischen Geräten verwendeten Bauteile haben oft, vor allem im achsennahen Bereich, rotationssymmetrische Oberflächen. Deshalb nehmen wir im folgenden an, daß die Grenzfläche zwischen den Gebieten 1 und 2 bezüglich der z - Achse eines zylindrischen Koordinatensystems rotationssymmetrisch ist, d.h. der Rand der Gebiete sei durch einen Kurvenverlauf $(z(s),r(s))$ im Achsenschnitt festgelegt. Dagegen wird für die Stromverteilung $\underline{j}(\underline{r})$ keine Symmetrie vorausgesetzt. Wir führen jetzt eine Fourierzerlegung der in der Integralgleichung vorkommenden Größen bezüglich des Azimutwinkels φ durch, wodurch wir eine Dimensionserniedrigung des zu lösenden Problems erhalten. Als abkürzende Schreibweise führen wir den zweikomponentigen Vektor $\underline{u} := (z,r)$ ein. Es sei:

$$V(\underline{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} V_m(\underline{u})\ e^{im\varphi} \tag{2.12}$$

$$N(\underline{r}) := \underline{n}\cdot\underline{H}_o = \sum_{m=0}^{\infty} N_m(\underline{u})\ e^{im\varphi} \tag{2.13}$$

Die Summenglieder $V_m(\underline{u})$ heißen in der Elektronenoptik Multipolfelder. Die Realität von $V(\underline{r})$ und $N(\underline{r})$ erfordert $V_{-m} = V_m^*$ und $N_{-m} = N_m^*$ für alle m. Ferner sei unter Berücksichtigung von $\alpha := \varphi - \varphi'$ der Kürze halber mit

$$D := |\underline{r}-\underline{r}'| = ((z-z')^2 + r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\alpha)^{1/2} \tag{2.14}$$

der Abstand zwischen den Punkten $\underline{r}$ und $\underline{r}'$ bezeichnet. Wir definieren nun folgende Funktionen und Konstanten:

$$\Phi_m(\underline{u},\underline{u}') := \int_0^{2\pi} \frac{\cos(m\alpha)}{D}\, d\alpha \qquad (2.15)$$

$$F_m(\underline{u},\underline{u}') := \underline{n}'\,\mathrm{grad}'\,\Phi_m = n_z' \frac{\partial}{\partial z}\Phi_m + n_r' \frac{\partial}{\partial r'}\Phi_m \qquad (2.16)$$

$$\mu := \frac{\mu_2}{\mu_1} \qquad \kappa := 2\pi\,\frac{\mu+1}{\mu-1} \qquad (2.17)$$

Die Funktionen $\Phi_m(\underline{u},\underline{u}')$ sind im wesentlichen die Fourierkomponenten von $G(\underline{r},\underline{r}')$. Damit nimmt die Integralgleichung (2.11) mit $\underline{u}'=\underline{u}(s')$ für ein beliebiges ganzzahliges m folgende Gestalt an:

$$\kappa V_m(\underline{u}) + \oint V_m(\underline{u}')\, F_m(\underline{u},\underline{u}')\, r'ds' = -\oint N_m(\underline{u}')\, \Phi_m(\underline{u},\underline{u}')\, r'ds' \qquad (2.18)$$

Mit $\underline{n}'(\underline{r}-\underline{r}') = p - n_r' r\,(1-\cos\alpha)$, wobei für p die Beziehung $p = n_z'(z-z') + n_r'(r-r')$ gilt, ergibt sich nach Ausführung der Differentation in (2.16) unter dem Integral (2.15):

$$F_m = \int_0^{2\pi} \frac{\underline{n}'\cdot(\underline{r}-\underline{r}')\cos(m\alpha)}{D^3}\, d\alpha \qquad (2.19)$$

$$= p \int_0^{2\pi} \frac{\cos(m\alpha)}{D^3}\, d\alpha - n_r' r \int_0^{2\pi} \frac{\cos(m\alpha)\,(1-\cos\alpha)}{D^3}\, d\alpha \,.$$

Die Funktionen $\Phi_m(\underline{u},\underline{u}')$ und $F_m(\underline{u},\underline{u}')$ können durch die vollständigen elliptischen Integrale $E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\,(1-k^2\cos^2\varphi)^{1/2}$ und $K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\,(1-k^2\cos^2\varphi)^{-1/2}$ ausgewertet werden.

2.3.1. Berechnung der Funktionen Φ_m und F_m für die speziellen Fälle m=0 und m=1

Da in den folgenden Beispielen die Fälle m=0 und m=1 auftreten werden, gebe ich hierfür die entsprechenden Ausdrücke an. Wie man die Berechnung für ein beliebiges m durchführt wird im nächsten Abschnitt gezeigt.

Mit $a^2 := ((z-z')^2 + (r+r')^2)^{-1}$ (2.20)

und $k^2 := 4r'ra^2$ (2.21)

gilt (Scherle 1982):

$$\Phi_o = 4\, a\, K(k) \tag{2.22}$$

$$\Phi_1 = 4\, a\, [2(K(k)-E(k))/k^2 - K(k)] \,. \tag{2.23}$$

Darüberhinaus gilt:

$$F_o = p\, I_o + n_r' r\, J_1 \tag{2.24}$$

$$F_1 = p\, I_1 + n_r' r\, J_2 \tag{2.25}$$

wobei die Integrale I_i und J_i folgendermaßen definiert sind:

$$\left.\begin{aligned} I_i &:= \int_0^{2\pi} \frac{(\cos\alpha)^i\, d\alpha}{D^3} \qquad (i=0,1,2) \\ J_i &:= (I_i - I_{i-1}) \qquad (i=1,2) \end{aligned}\right\} \tag{2.26}$$

Ihre explizite Darstellung lautet speziell:

$$\left.\begin{aligned} I_o &= 4\, a^3\, E(k)/(1-k^2) \\ I_1 &= (2-k^2)\, I_o/k^2 - 8\, a^3\, K(k)/k^2 \\ I_2 &= (8-8k^2+k^4) I_o/k^4 - 16\, a^3 (2-k^2) K(k)/k^4 \end{aligned}\right\} \tag{2.27}$$

$$J_1 = 8\,a^3\,[E(k)-K(k)]/k^2$$
$$J_2 = 8\,a^3\,[(4-k^2)E(k)-(4-3k^2)K(k)]/k^4 \qquad (2.28)$$

(siehe Anhang 2). Bei der numerischen Ausführung der Integration in (2.18) treten an der Stelle $\underline{u}'=\underline{u}$ in den Termen, welche F_o und F_1 enthalten, Schwierigkeiten auf. Mit $s:=|\underline{u}-\underline{u}'|$ gilt nämlich für $k^2\approx 1$: $(1-k^2)^{-1}\sim s^{-2}$, sodaß die Terme in I_j, welche $(1-k^2)^{-1}$ enthalten, zu singulär werden, um einzeln numerisch integriert werden zu können. Durch Kombinieren der zweiten Terme von F_m zu $J_i=(I_i-I_{i-1})$ kürzt sich $(1-k^2)$ im Nenner heraus. Da ferner in der Nähe der Singularität $z'=z+t_z's+O(s^2)$ und $r'=r+t_r's+O(s^2)$ ist, gilt wegen $(n_z't_z'+n_r't_r')=0$: $p = (n_z'(z-z')+n_r'(r-r')) \sim s^2$. Dadurch bleibt die resultierende Singularität der Funktion F_m wie die von K(k) logarithmisch. Hierfür gibt es aber geeignete numerische Integrationsverfahren.

2.3.2. Berechnung der Funktionen Φ_m und F_m für beliebige m

Nachdem wir für die speziellen Fälle m=0,1 die Struktur des Problems gezeigt haben, wollen wir auf beliebige m verallgemeinern. Für größere Werte von m kann man Φ_m und F_m wahlweise entweder durch eine Rekursion oder durch eine Potenzreihenentwicklung berechnen (Kasper, Scherle 1982). Welches der beiden Verfahren jeweils für die numerische Berechnung geeigneter ist, hängt von $\underline{u}$ und $\underline{u}'$ ab. Bei der Darstellung der beiden Verfahren führt man zweckmäßigerweise die im folgenden definierten von $\underline{u}$ und $\underline{u}'$ abhängigen Parameter w, λ und ϱ ein:

$$w := ((r^2+r'^2+(z-z')^2)^2-4r'^2r^2)^{1/2} = D_1D_2 \qquad (2.29)$$

$$\lambda := (0.5(r^2 + r'^2 + (z-z')^2 + w))^{1/2} = \tfrac{1}{2}(D_1+D_2) \qquad (2.30)$$

$$\varrho := r'r/\lambda^2 = (D_2-D_1)/(D_2+D_1) \quad . \qquad (2.31)$$

Der Zusammenhang zwischen ϱ und k^2 lautet: $k^2 = 4\varrho(1+\varrho)^{-2}$. Die geometrische Bedeutung dieser Parameter kann man aus Fig.2 entnehmen. Der Ort $\underline{r}'(\underline{u}',\varphi')$ durchläuft bei festgehaltenem $\underline{u}'$ und von 0 bis 2π variiertem φ' eine Kreislinie auf der Integrationsfläche in der Ebene z=z' vom Radius r'. Dabei ist D_1 das Minimum und D_2 das Maximum des durch (2.14) definierten Abstandes $D(\underline{u},\underline{u}',\alpha)$.

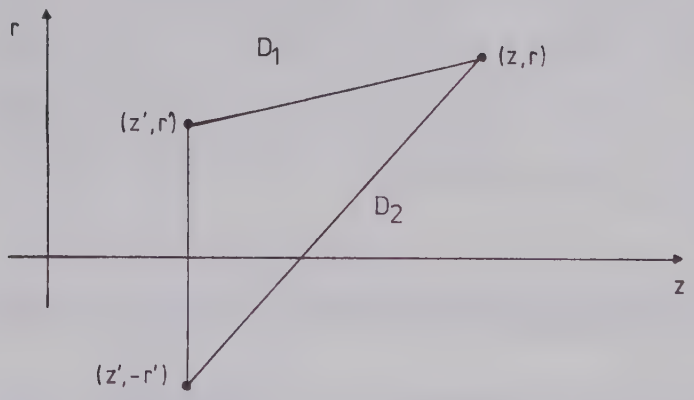

Fig.2: Veranschaulichung der Parameter w, λ und ϱ. Meridionaler Schnitt durch den Aufpunkt (z,r).

Mit der Funktion

$$K_m(\varrho) := \int_0^{2\pi} \frac{\cos(m\alpha)}{\sqrt{1-2\varrho\cos\alpha+\varrho^2}}\, d\alpha \qquad (2.32)$$

gilt nun :

$$\Phi_m = 1/\lambda\ K_m(\varrho) \quad . \qquad (2.33)$$

Die Funktion $K_m(\varrho)$ wird je nach dem numerischen Wert von ϱ durch unterschiedliche Verfahren berechnet. Für den oberen Wertebereich von ϱ eignet sich die Rekursion (Kasper, Scherle 1982):

$$(2m+1)K_{m+1}(\varrho) = 2m(\varrho + 1/\varrho)K_m(\varrho) - (2m-1)K_{m-1}(\varrho) \quad (2.34)$$

mit den Anfangswerten $K_o(\varrho)=4K(\varrho)$ und $K_1(\varrho)=4(K(\varrho)-E(\varrho))/\varrho$. Unserer Erfahrung nach läßt sich für $m < 12$ die Rekursion im Bereich $0.4 < \varrho < 1$ problemlos anwenden, wird aber für $\varrho < 0.4$ instabil. Für den Wertebereich $0 < \varrho < 0.5$ läßt sich $K_m(\varrho)$ durch eine Reihenentwicklung nach Potenzen von ϱ berechnen. Hierzu wird unter dem Integral (2.32) der Bruch $(1-2\varrho\cos\alpha+\varrho^2)^{-1/2}$ in eine Reihe von Legendrefunktionen entwickelt. Anschließend integriert man unter Beachtung der Orthogonalitätsbedingung der Winkelfunktionen über den Winkel α. Man erhält folgende Reihe:

$$K_m(\varrho) = 2\pi\varrho^m \sum_{j=0}^{\infty} a_{m,j}\,\varrho^{2j} \quad (2.35)$$

$$\text{mit} \quad a_{m,j} := \frac{(2j)!\,(2j+2m)!}{2^{2m+4j}\,(j!)^2\,((j+m)!)^2} \quad . \quad (2.36)$$

Zur Berechnung von F_m benötigen wir die Ableitungen von λ und ϱ nach z' und r'. Nach elementarer Rechnung erhält man:

$$\begin{aligned}
\partial_{z'}\lambda &= \lambda\,(z'-z)/w \\
\partial_{r'}\lambda &= r'(\lambda^2 - r^2)/(\lambda\, w) \\
\partial_{z'}\varrho &= -\,2\varrho(z'-z)/w \\
\partial_{r'}\varrho &= r\,(\,1 - 2r'^2/w + 2r'^2r^2/(\lambda^2 w)\,)/\lambda^2
\end{aligned} \quad (2.37)$$

∂_v steht dabei symbolisch für die partielle Ableitung nach v. Die ausführliche Herleitung dieser Beziehungen findet man bei (Kasper, Scherle 1982). Nun gilt $F_m = \underline{n}'\text{grad}'\Phi_m = n_z'\partial_z'\Phi_m + n_r'\partial_r'\Phi_m$. Setzt man v representativ für z' beziehungsweise für r', so gilt:

$$\partial_v\Phi_m = -(1/\lambda^2)\, K_m(\varrho)\, \partial_v\lambda + (1/\lambda)\, K_m'(\varrho)\, \partial_v\varrho \quad . \qquad (2.38)$$

Für $K_m'(\varrho)$ erhält man durch Ableiten der Rekursion (2.34) nach ϱ folgende Rekursion:

$$(2m+1)K_{m+1}'(\varrho) - 2m(\varrho+1/\varrho)K_m'(\varrho) + (2m-1)K_{m-1}'(\varrho)$$

$$= 2m(1-1/\varrho^2)K_m(\varrho) \qquad (2.39)$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$K_o'(\varrho) = 4[(\varrho-1/\varrho)K(\varrho) + 1/\varrho E(\varrho)]/(1-\varrho^2)$$

und $K_1'(\varrho) = 4[(1-1/\varrho^2)K(\varrho) + 1/\varrho^2 E(\varrho)]/(1-\varrho^2)$.

In der Rekursion (2.39) ist ein Term mit $K_m(\varrho)$ als Inhomogenität enthalten. Für den unteren Wertebereich von ϱ erhält man $K_m'(\varrho)$ durch Differenzieren der Reihe (2.35):

$$K_m'(\varrho) = 2\pi\, \varrho^{m-1} \sum_{j=0}^{\infty} a_{m,j}\, (2j+m)\, \varrho^{2j} \quad . \qquad (2.40)$$

Dann ergibt sich F_m zu:

$$F_m = (1/\lambda)\, K'_m(\varrho)\, (n_r'\partial_r'\varrho + n_z'\partial_z'\varrho)$$

$$- (1/\lambda^2)\, K_m(\varrho)\, (n_r'\partial_r'\lambda + n_z'\partial_z'\lambda) \quad .$$

2.4. Lösung der fouriertransformierten Integralgleichung mit einem Splineansatz

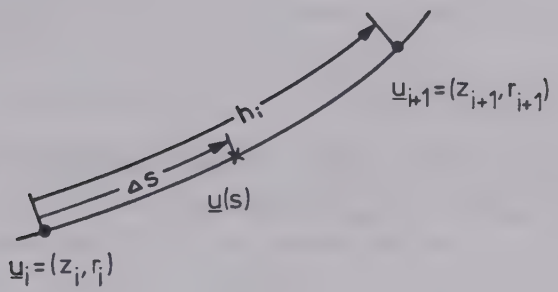

Fig.3: Bezeichnungsweise für ein Intervall L_i auf der Randkurve

Es sei s die Weglänge auf dem Rand $\underline{u}(s)$. Wir geben auf dem Rand N Stützstellen $\underline{u}_i$, (i=1,...,N) mit den Parameterwerten s_i vor (siehe Fig. 3). In den Stützstellen habe das zunächst noch unbekannte Potential den Wert $P_i=V_m(\underline{u}_i)$ mit der Tangentialableitung P'_i. Der Multipolindex m wird hier, soweit er nicht explizit benötigt wird, aus Gründen der Übersichtlichkeit unterdrückt. Gilt $s_i \le s \le s_{i+1}$, so folgt mit $h_i := s_{i+1} - s_i$, $0 \le t := (s - s_i)/h_i \le 1$, sowie mit dem Ansatz einer kubischen Splinefunktion für das Oberflächenpotential an der Stelle s:

$$V_m(s) = f_1(t)\, P_i + f_2(t)\, P_{i+1} + f_3(t)\, P'_i + f_4(t)\, P'_{i+1} \qquad (2.41)$$

wobei:
$$f_1(t) := (1-3t^2+2t^3)$$
$$f_2(t) := t^2\,(3-2t) = 1 - f_1(t)$$
$$f_3(t) := h_i\, t\,(t-1)^2$$
$$f_4(t) := h_i\, t^2(t-1) \qquad (2.42)$$

ist. Setzt man diesen Ansatz in die Integralgleichung ein, so erhält man N Gleichungen der Form:

$$\sum_{k=1}^{N}(\kappa\,\delta_{i,k} + A_{i,k})\,P_k + \sum_{k=1}^{N} B_{i,k}\,P'_k = T_i \qquad (2.43)$$
$$i = 1,\ldots,N$$

mit dem Kronecker Symbol $\delta_{i,k}$ und:

$$A_{i,k} := \int_{L_{k-1}} f_2\,F_m\,r'ds' + \int_{L_k} f_1\,F_m\,r'ds'$$
$$B_{i,k} := \int_{L_{k-1}} f_4\,F_m\,r'ds' + \int_{L_k} f_3\,F_m\,r'ds' \qquad (2.44)$$
$$T_i := -\oint N_m\,\Phi_m\,r'\,ds'$$

Hierbei bezeichnet L_k das k-te Intervall im Definitionsbereich der Bogenlänge s. Der Index i bezieht sich dabei auf die i-te Stützstelle, die mit $\underline{u}_i=(z_i,r_i)$ in $\Phi_m(\underline{u}_i,\underline{u}')$ und $F_m(\underline{u}_i,\underline{u}')$ enthalten ist. In (2.43) sind P_i und P'_i unbekannt. Damit wir das Gleichungssystem lösen können, benötigen wir N weitere Gleichungen. Diese erhalten wir durch die Splinebedingung:

$$k_{i-1}\,P'_{i-1} + 2(k_{i-1}+k_i)\,P'_i + k_i\,P'_{i+1} \qquad (2.45)$$

$$= 3(k_{i-1})^2\,(P_i-P_{i-1}) + 3(k_i)^2\,(P_{i+1}-P_i)$$

für $i = 2,\ldots,(N-1)$ und $k_i := (h_i)^{-1}$

welche aus der Stetigkeit der zweiten Ableitung an den Stützstellen resultiert. Für i=1 gilt (2.45), wenn man (i-1) durch N ersetzt und für i=N, wenn man (i+1) durch 1 ersetzt. Diese Sonderbedingungen resultieren aus der Geschlossenheit der Randkurve. Gleichungen (2.43) und (2.45) bilden zusammen ein lineares Gleichungssystem der Dimension 2N für die P_i und P'_i. Die größtmögliche Genauigkeit des Verfahrens erhält man, wenn man $h_i=h$ für alle $i=1,\ldots,N$ wählt, da dann das Fehlerglied proportional zu h^5 wird. Die Lösung der Integralgleichung ist auf diese Weise auf diejenige eines linearen Gleichungssystems zurückgeführt. Es sei:

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A+\varkappa I & B \\ \hline D_1 & D_2 \end{array}\right]$$

die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems, wobei I die N-dimenmsionale Einheitsmatrix bezeichnet. (A+ϰI) und B sind die über (2.43) definierten Untermatrizen. D_1 und D_2 sind die sich aus (2.45) ergebenden zyklischen Tridiagonalmatrizen. $V:=(P_1,\ldots,P_N,P'_1,\ldots,P'_N)$ sei der gesuchte Lösungsvektor und $T:=(T_1,\ldots,T_N,0,\ldots,0)$ sei die rechte Seite des Gleichungssystems. Dann gilt:

$$M\,V = T \qquad V = M^{-1}\,T \qquad (2.47)$$

2.5. Berechnung des Potentials und der Feldstärke im gesamten Raum

Bis jetzt haben wir durch die Lösung der Integralgleichung das Potential auf dem Rand in den Stützstellen $\underline{u}_i=(z_i,r_i)$ erhalten. Zur Berechnung des Potentials im gesamten Raum eignet sich das auf Multipole erweiterte Kreisringverfahren (Kasper, Scherle 1982). Hierzu wird eine Anzahl von zur z-Achse konzentrischen Kreisringen eingeführt, deren j-ter in der Ebene $z=Z_j$ liegt und den Radius R_j besitzt. Die Punkte $\underline{U}_j=(Z_j,R_j)$ liegen im allgemeinen nicht auf der Grenzfläche, aber in deren Nähe. Die Zahl N' der Kreisringe braucht nicht gleich der Zahl N der zur Lösung der Integralgleichung verwandten Stützstellen $\underline{u}_i$ zu sein. Da man bei der Integralgleichung durch den Splineansatz mit wenigen Stützstellen auskommt, kann es erforderlich sein, mehr Kreisringe als Stützstellen zu verwenden, um eine ausreichende Genauigkeit zu erreichen. Da ja das Randpotential $V_m(s)$ nach Gleichung (2.41) leicht berechenbar ist, bereitet es keine große Schwierigkeit, weitere erforderliche Potentialwerte in zusätzlichen Stützstellen auf dem Rand zu berechnen. Will man das Potential im Gebiet 1 berechnen, so legt man die Ringe mit den Ladungen ins Gebiet 2 und umgekehrt. Der j-te Ring habe die Ladungsverteilung:

$$Q_j(\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Q_{m,j}\, e^{im\varphi} \qquad (2.48)$$

wobei $Q_{m,j}=Q_{-m,j}^*$ gilt. Dabei sind die Ladungen $Q_j(\varphi)$ so definiert, daß sie das Potentialfeld:

$$V(\underline{r}) = \sum_{j=1}^{N'} \int_0^{2\pi} \frac{Q_j(\varphi')\, d\varphi'}{D(\underline{u},\underline{U}_j,\alpha)} \qquad (2.49)$$

erzeugen. Setzt man nun die Ringpositionen $\underline{U}_j=(Z_j,R_j)$ in Φ_m ein, so gilt für die m-te Fourierkomponente des Potentials:

$$V_m(\underline{u}) = \sum_j Q_{m,j}\, \Phi_m(\underline{u},\underline{U}_j) \quad . \qquad (2.50)$$

Insbesondere gilt für $\underline{u} = \underline{u}_i = (z_i,r_i)$ mit $V_m(\underline{u}_i) = P_i$ $(i=1,\ldots,N')$:

$$P_i = \sum_j Q_{m,j}\, \Phi_m(\underline{u}_i,\underline{U}_j) \quad . \qquad (2.51)$$

P_i ist dabei die m-te Fourierkomponente des Potentialwertes der i-ten Stützstelle auf dem Rand. Dieses Gleichungssystem kann nach $Q_{m,j}$ aufgelöst werden. Nach der Bestimmung von $Q_{m,j}$ erhält man mit (2.50) die Fourierpotentiale im ganzen Raum.

Nach Umrechnung der Koordinaten des Aufpunktes $\underline{r}$ und derjenigen des j-ten Kreisrings in die Parameter λ_j und ϱ_j läßt sich das Potential im Aufpunkt $\underline{r}$ folgendermaßen darstellen:

$$V(\underline{r}) = \sum_m \sum_j 1/\lambda_j\, K_m(\varrho_j)\, Q_{m,j}\, e^{im\varphi}$$

Für die Feldstärke $\underline{F}(\underline{r})$ = grad $V(\underline{r})$ ergibt sich nach Ausführung der Differentiation:

$$F_z = \sum_m \sum_j 1/\lambda_j \left[K'_m(\varrho_j)\partial_z\varrho_j - 1/\lambda_j K_m(\varrho_j)\partial_z\lambda_j\right] Q_{m,j}\, e^{im\varphi}$$

$$F_r = \sum_m \sum_j 1/\lambda_j \left[K'_m(\varrho_j)\partial_r\varrho_j - 1/\lambda_j K_m(\varrho_j)\partial_r\lambda_j\right] Q_{m,j}\, e^{im\varphi}$$

$$F_\varphi = \frac{1}{r} \sum_m \sum_j 1/\lambda_j\, K_m(\varrho_j)\, Q_{m,j}\, im\, e^{im\varphi} \quad .$$

Die hierbei auftretenden Größen wurden im Abschnitt 2.3.2. definiert.

2.6. Beispiele

2.6.1. Analytische Testlösung

Zum Testen der Genauigkeit eines Verfahrens ist es gut, wenn man es auf einen Fall anwendet, für den eine analytische Lösung bekannt ist. Für unser Verfahren eignet sich eine Kugel mit der relativen Permeabilität μ im asymptotisch homogenen Magnetfeld $\underline{H}=H_o\,\underline{e}_z$. Wenn R der Radius der Kugel ist und $\vartheta=\sphericalangle(\underline{r},\underline{e}_z)$, dann gilt in Kugelkoordinaten (R,ϑ,φ):

$$V(R,\vartheta,\varphi) = -\frac{\mu-1}{\mu+2}H_o R\cos\vartheta \qquad (2.52)$$

Zum numerischen Testlauf wurde der Rand in 30 Sekantenstücke zerlegt. Mit dieser Näherung konnte das Potential (2.52) mit einer Genauigkeit von besser als einem Promille reproduziert werden. Es ist zu erwarten, daß sich die Genauigkeit bei Berücksichtigung des genauen Kurvenverlaufs des Randes, der hier durch einen Polygonzug approximiert war, wesentlich steigert.

2.6.2. Magnetische Rundlinse

In den folgenden Beispiele ist m=0, d.h. das Potential ist unabhängig vom Azimut. Fig.4 zeigt die Anordnung, die wir berechnen wollen. Der Stromverlauf $\underline{j}=j_o\,\underline{e}_\varphi$ sei gleichförmig über den ringförmigen Spulenkörper mit rechteckigem Querschnitt verteilt. Der Spulenkörper befindet sich in einem abschirmenden Materialmantel. In Fig.4 ist auch der Potentialverlauf des Potentials $V_o(z,r)$ eingezeichnet, das zusätzlich zu dem durch die Spule erzeugten H_o-Feld durch Anwesenheit des Materialmantels hervorgerufen wird. Wir haben

darauf verzichtet, das gesamte Magnetfeld darzustellen, da wir bei der Behandlung der Integralgleichung primär an einer Veranschaulichung ihrer skalaren Lösung interessiert sind. Die hier berechnete Linse läßt sich mit der Integralgleichungsmethode recht einfach und schnell berechnen, während die gängigen Methoden wie etwa die der finiten Elemente hier wesentlich aufwendiger sind.

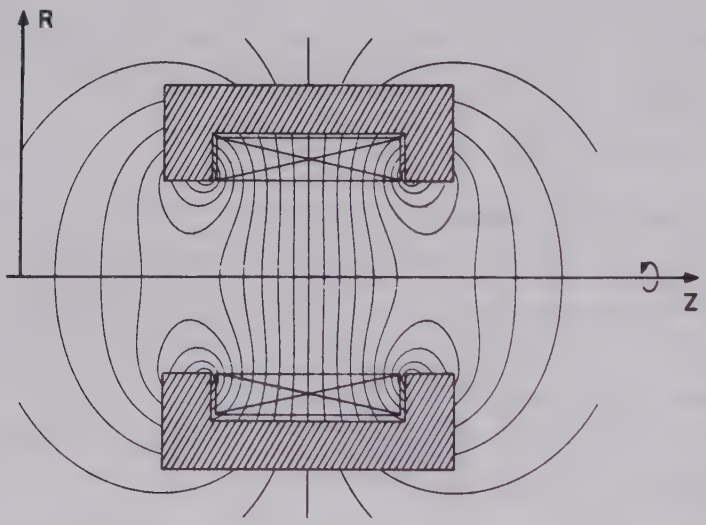

Fig.4:Eisengekapselte magnetische Rundlinse mit dem Potential $V_o(z,r)$ im Achsenschnitt

Die beiden nächsten Abbildungen zeigen eine Gegenüberstellung des Potentialverlaufs für zwei unterschiedliche Permeabilitäten des die Spule umgebenden Materialmantels, der vorigen Anordnung. In Fig.5a ist das Material des Mantels hochpermeabel ($\mu = 10^5$). Hier stellt sich das Potential so ein, daß die Tangentialkomponente des H_o-Feldes auf der Oberfläche des Materials kompensiert wird.

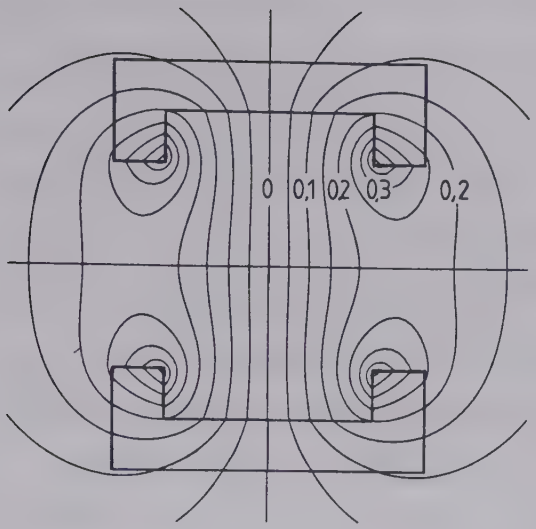

Fig.5a: Potentialverlauf bei einem Eisenmantel

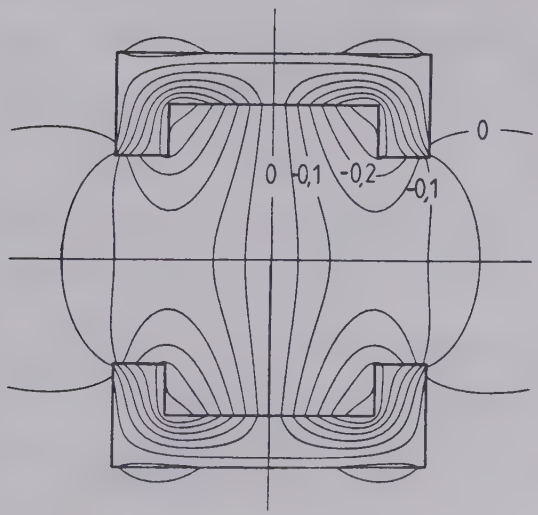

Fig.5b: Potentialverlauf bei einem supraleitendem Mantel

In Fig.5b hat das Material des Mantels die Permeabilität $\mu = 0$. Das Potential stellt sich jetzt so ein, daß die Normalkomponente des H_o-Feldes auf der Oberfläche kompensiert wird. Außerhalb des Materials erhält man dadurch das Feld einer Linse, die mit einem supraleitenden Mantel umgeben ist. Innerhalb des Mantels stimmt diese Aussage jedoch nicht mehr, da die Tangentialkomponente des H-Feldes stetig ist. Dadurch ist das Innere des Mantels nicht feldfrei. Für die Untersuchung der elektronenoptischen Eigenschaften solcher Linsen interessiert das Feld im Materialinnern nicht, sodaß das Verfahren auch zur Berechnung supraleitender Linsen anwendbar ist.

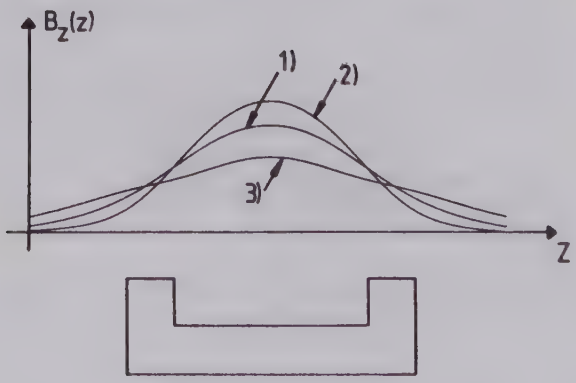

Fig.6: Verlauf von Achsenfeldstärken

1) ist dabei die Kurve der Spule ohne Mantel,

2) ist die Kurve der Spule mit Eisenmantel,

3) ist die Kurve der Spule mit supraleitendem Mantel.

Die nächste Abbildung zeigt den Verlauf der gesamten Achsenfeldstärke für diese Anordnungen. Der Eisenmantel führt offensichtlich zu einer stärkeren Feldkonzentration im Linsen-

innern, der supraleitende Mantel zu einer stärkeren Feldverdrängung nach außen.

2.6.3. Magnetische Ablenksysteme

Die nächsten Anordnungen sind Beispiele für den Fall m=1. In Fig.7a wird schematisch der Wicklungsverlauf einer Toroidspule und in Fig.7b der einer Sattelpule gezeigt. Fig.8a und Fig.8b zeigen den durch einen Eisenring hervorgerufenen Potentialverlauf V(0,y,z) und V(x,y,0) einer Toroid- und einer Sattelspule. Man sieht den Verlauf des in Bezug auf die x- und z-Koordinate symmetrischen, in Bezug auf die y-Koordinate antisymmetrischen Potentials im Schnitt mit der (z,y)-Ebene und mit der (x,y)-Ebene. Der Schnitt mit der (z,y)-Ebene entspricht dem Verlauf des Potentials $|V_1(z,r)|$. Die nächsten beiden Abbildungen in Fig.9 zeigen den Verlauf der Feldstärkekomponente $B_y(0,0,z)$ längs der z-Achse für die beiden obigen Spulen. Die Kurven beziehen sich auf unterschiedliche Werte von μ des Kerns, um den die Spulen gewikkelt sind. Die Kurve mit $\mu = 1$ entspricht der Spule bei Abwesenheit aller Materialien. Man sieht, daß für wachsendes μ schnell eine Sättigung erreicht wird, d.h. daß sich der Verlauf des H-Feldes ab $\mu = 10^3$ praktisch nicht mehr verändert. Die Auswirkung des Eisenkerns auf den Feldverlauf ist unter sonst gleichen Bedingungen bei Toroidspulen wesentlich größer als bei Sattelspulen, was man schon an der höheren Potentialliniendichte in Fig.8 sehen kann. Bei Sattelspulen wird die Feldstärke im achsennahen Bereich durch Spiegelung der im Innern verlaufenden Wicklungen an der Innenwand verdoppelt. Bei Toroidspulen kommt zu dieser Verdoppelung der Feldstärke der inneren Wicklung noch eine Abschirmung der

äußeren Wicklung hinzu, die ja bei der Spule ohne Kern das Feld auf der Achse schwächt. Diese Effekte werden in der Umgebung der Spulenmitte um so ausgeprägter, je größer das Verhältnis von Kernlänge und Innenradius ist.

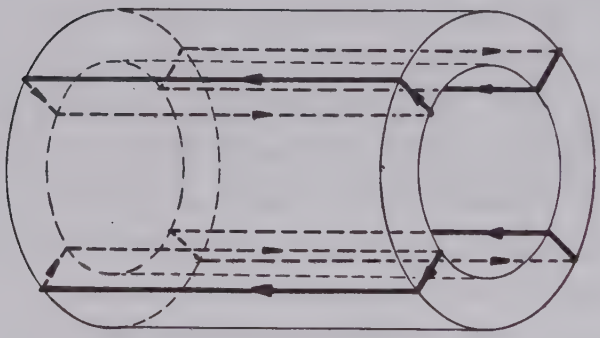

Fig.7a: Wicklungsverlauf bei Toroidspulen

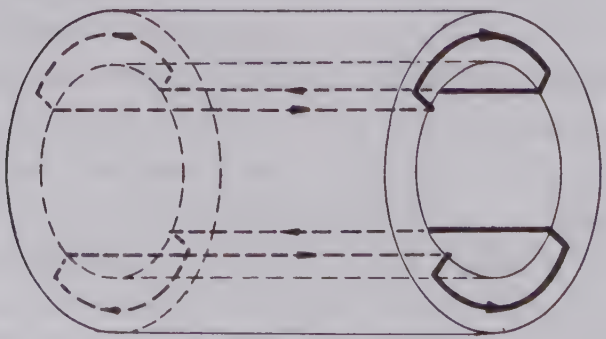

Fig.7b: Wicklungsverlauf bei Sattelspulen

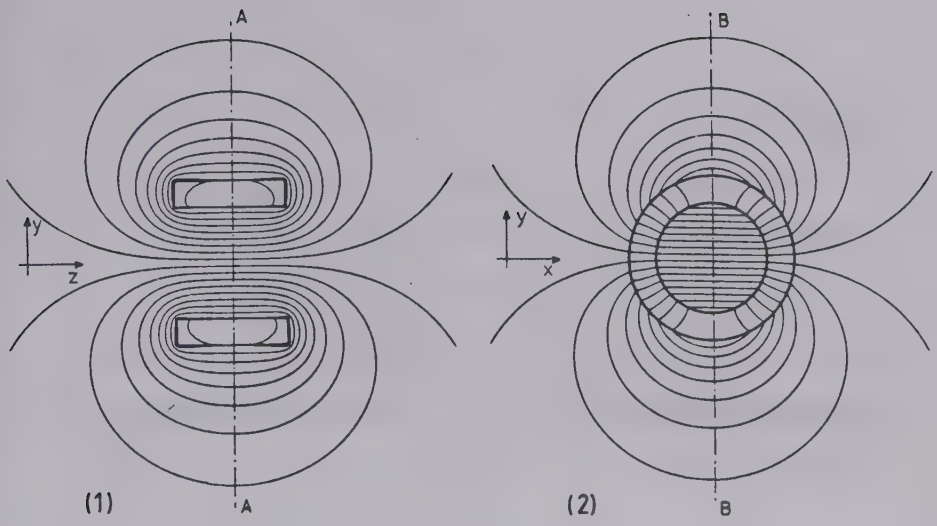

Fig.8a: Potentialverlauf bei Wicklung als Toroidspule

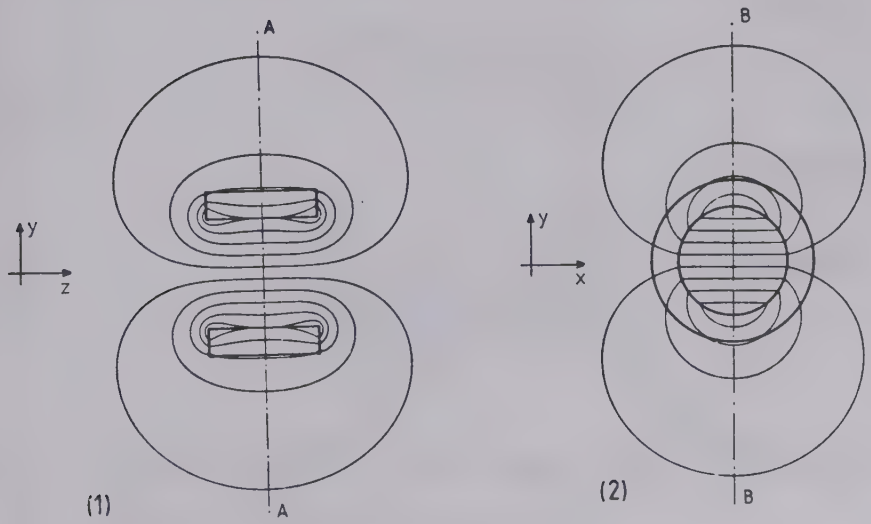

Fig.8b: Potentialverlauf bei Wicklung als Sattelspule

(1) jeweils Schnitt BB (2) jeweils Schnitt AA. ($\mu=10^5$)

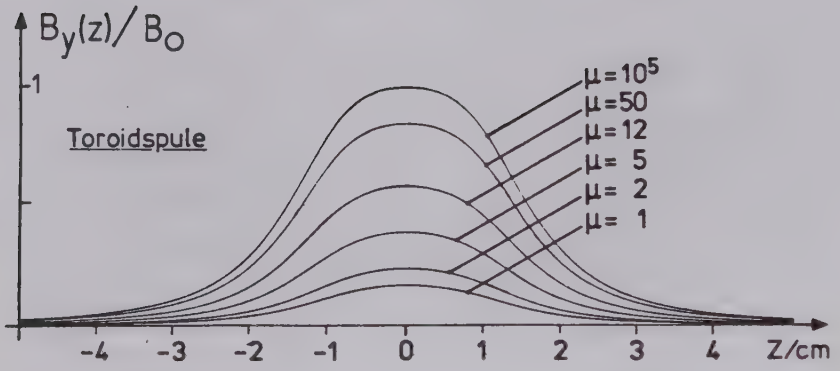

Fig.9a:

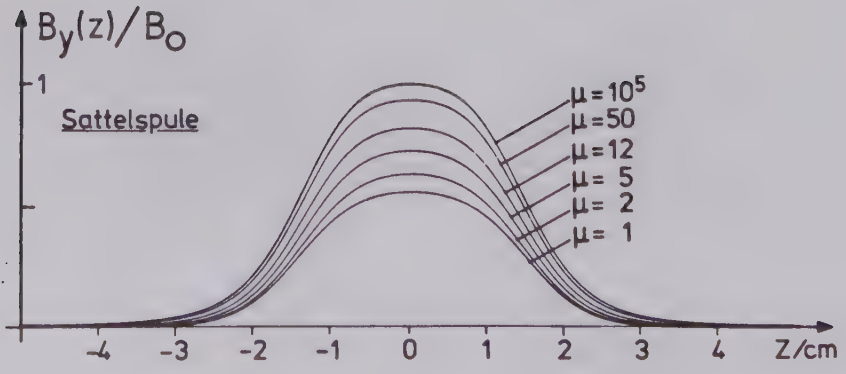

Fig.9b: Transversale Achsenfeldstärken $B_y(z)$

Zur Bestätigung der Integralgleichungsmethode habe ich das Feld einer nach dieser Methode berechneten Toroidspule mit dem Feld einer von Kasper und Schwertfeger berechneten Toroidspule (Kasper, Schwertfeger 1974) verglichen und gute Übereinstimmung der Resultate gefunden. Die Methode von Kasper und Schwertfeger setzt allerdings eine auf der Oberfläche verlaufende Wicklungsdichte und $\mu = \infty$ voraus. Dagegen kann man mit der Integralgleichungsmethode auch endliches μ und beliebigen Stromverlauf zulassen. Fig.10 zeigt z.B. den Verlauf des Potentials in einem Ablenksystem, in dem sich eine Sattelspule in merklichem Abstand von den Materialoberflächen befindet.

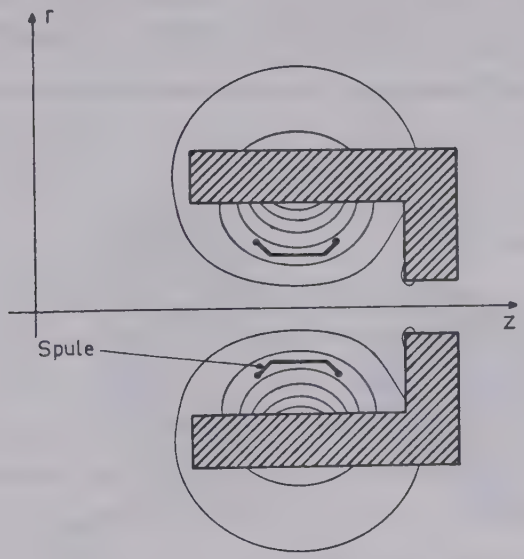

Fig.10: Verlauf des Fourierpotentials $|V_1(z,r)|$ in einem Ablenksystem, das sich in erheblichem Abstand von einem ferromagnetischen Kern befindet.

2.7. Erweiterung des Verfahrens auf mehrere Gebiete

2.7.1. Herleitung eines iterativen Verfahrens

Bei der Herleitung des Integralgleichung (2.11) haben wir in (2.10) die Normalableitungen des Potentials eliminiert. Dazu war ein Grenzübergang des Aufpunktes zur Trennfläche der beiden Medien notwendig. Liegen nun mehrere nicht miteinander zusammenhängende Medien vor, so läßt sich dieser Schritt nicht mehr durchführen. Man kann jedoch mit Hilfe der Integralgleichung (2.11) ein iteratives Verfahren durchführen, das hier anhand einer Anordnung mit zwei nicht zusammenhängenden Gebieten unterschiedlicher Permeabilität erläutert werden soll. Gegeben seien also zwei Gebiete mit den Permeabilitäten μ_1 und μ_2 im Vakuum mit der Permeabilität μ_o (siehe Fig.11).

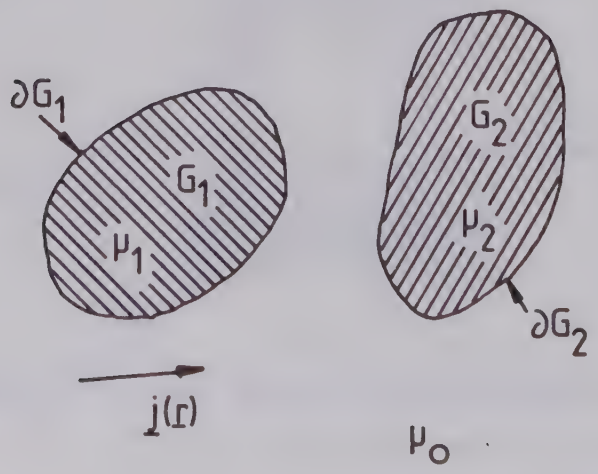

Fig.11: Gebietseinteilung

Das Gesamtpotential $V(\underline{r})$ soll sich aus den einzelnen Potentialen $V_1(\underline{r})$ und $V_2(\underline{r})$ zusammensetzen, deren Quellen sich auf dem Rand von G_1 beziehungsweise von G_2 befinden sollen. Die Gesamtfeldstärke $\underline{H}(\underline{r})$ ergibt sich zu:

$$\underline{H}(\underline{r}) = \underline{H}_o(\underline{r}) + \text{grad } V_1(\underline{r}) + \text{grad } V_2(\underline{r}) \qquad (2.53)$$

wobei sich $\underline{H}_o(\underline{r})$ nach (2.3) berechnen soll. Der Rechnungsablauf zur Berechnung von V_1 und V_2 erfolgt nach folgenden Schritten:

1) Zunächst ignoriert man G_2 und löst für G_1 mit $\underline{H}_o$ nach bekanntem Verfahren die Integralgleichung. Man erhält als Lösung die Integralgleichung das Potential V_1^0.

2) Mit dem erzeugenden Feld $\underline{H}_o^1 = \underline{H}_o + \text{grad } V_1^0$ löst man die Integralgleichung für G_2 und erhält als Lösung das Potential V_2^0.

3) Durch das Potential V_2^0 sind aber die Randbedingungen auf ∂G_1 nicht mehr erfüllt. Jetzt ist grad V_2^0 ein erzeugendes Feld, das eine Potentialverschiebung auf ∂G_1 um V_1^1 bewirkt. Diese kann mit (2.11) berechnet werden. Die Potentialverschiebung V_1^1 bewirkt wiederum eine Potentialverschiebung auf ∂G_2 um V_2^1. Die Fortführung dieses Gedankenganges führt zu einem iterativen Lösungsprozeß für V_1 und V_2. Sofern das Verfahren konvergiert, gilt:

$$V_1(\underline{r}) = \sum_{i=0}^{\infty} V_1^i(\underline{r})$$
$$V_2(\underline{r}) = \sum_{i=0}^{\infty} V_2^i(\underline{r}) \quad . \qquad (2.54)$$

Die Potentiale V_1^i und V_2^i lassen sich nach folgendem Schema berechnen:

$$\frac{\mu_k+\mu_o}{2(\mu_k-\mu_o)} V_k^i(\underline{r}) + \oint\!\!\!\!\!\!\iint_{\partial G_k} V_k^i(\underline{r}') \frac{\partial}{\partial n} G(\underline{r},\underline{r}')\, df' \qquad (2.55)$$

$$= - \oint\!\!\!\!\!\!\iint_{\partial G_k} G(\underline{r},\underline{r}')\, \underline{n}' \underline{H}_k^i(\underline{r}')\, df'$$

wobei: $\underline{H}_1^0 = \underline{H}_o$ $\qquad$ $\underline{H}_2^0 = \underline{H}_o + \text{grad } V_1^0$

und $(i>0)$ $\qquad$ $\underline{H}_1^i = \text{grad } V_2^{i-1}$ $\qquad$ $\underline{H}_2^i = \text{grad } V_1^i$.

Der iterative Prozeß wird hierbei nicht mit dem gesamten Feld, sondern nur mit den Zuwachsraten des Potentials durchgeführt.
Die Konvergenz des Verfahrens wird im nächsten Abschnitt an zwei Beispielen untersucht.

2.7.2. Praktisches Lösungsverfahren und Beispiele

Zur Lösung der Integralgleichung führen wir auf dem Rand des k-ten Gebietes N_k Stützstellen ein. Nach dem im Abschnitt 2.4. erläuterten Verfahren berechnet man dann nach (2.47) die Koeffizientenmatrix A_k und den Vektor der rechten Seite $T_k^i = ((T_k^i)_1, \ldots, (T_k^i)_{N_k}, 0, \ldots, 0)$; $k=1,2$. Im folgenden wollen wir den Multipolindex m wieder als festgehalten annehmen. Wenn V_k^i der gesuchte Lösungsvektor im i-ten Iterationslauf ist, so gilt:

$$V_1^i = (A_1)^{-1} T_1^i$$

$$V_2^i = (A_2)^{-1} T_2^i \quad . \qquad (2.56)$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit unterdrücken wir wieder m überall da, wo keine Mißverständnisse auftreten können. Für die j-te Komponente von T_k^i gilt dabei:

$$(T_k^i)_j := \oint \Phi_m(\underline{u}_j,\underline{u}')\, N_k^i(\underline{u}')\, r'ds' \,. \qquad (2.57)$$

$N_k^i(\underline{u})$ ist dabei die m-te Fourierkomponente des Produktes $\underline{n}(\underline{r})\cdot\underline{H}_k^i(\underline{r})$. Die Berechnung der $(T_k^i)_j$ ist in der Regel recht zeitaufwendig und dadurch der die Rechenzeit bestimmende Faktor. Haben die beiden Gebiete einen genügend großen Abstand voneinander, oder sind die Integrationsintervalle auf dem Rand des k-ten Gebietes genügend klein, so ändert sich $N_k^i(\underline{u})$ in jedem Integrationsintervall nur schwach. Dadurch kann die rechte Seite folgendermaßen berechnet werden:

$$(T_k^i)_j = \oint \Phi_m(\underline{u}_j,\underline{u}')\, N_k^i(\underline{u}')\, r'ds' \qquad (2.58)$$

$$= \sum_{n=1}^{N_k} (R_k^i)_n \int_{L^k_n} \Phi_m(\underline{u}_j,\underline{u}')\, r'ds' \,.$$

Dabei ist L^k_n das n-te Längenintervall auf dem Rand des k-ten Gebietes. Ist $\underline{u}_n$ ein Punkt in diesem Intervall, so ersetzen wir nach dem Mittelwertsatz der Integralgleichung im n-ten Randintervall $N_k^i(\underline{u}')$ durch $(R_k^i)_n := N_k^i(\underline{u}_n)$. Der Index j in (2.58) bezieht sich dabei auf die j-te Stützstelle $\underline{u}_j=(z_j,r_j)$, die als festgehaltener Punkt in $\Phi_m(\underline{u}_j,\underline{u}')$ enthalten ist.

Mit $$(C_k)_{j,n} := \int_{L^k_n} \Phi_m(\underline{u}_j,\underline{u}')\, r'ds' \qquad (2.59)$$

gilt nun $$(T_k^i)_j = \sum_n (C_k)_{j,n}\, (R_k^i)_n \,.$$

Die Matrix C_k wird abgespeichert, und man muß nur noch die Komponenten $(R_k{}^i)_n$ zur Berechnung des Arrays $R_k{}^i$ auswerten. Falls der Strom nahe der Oberfläche eines der beiden Gebiete verläuft, führt man die Berechnung der Startwerte mit einer genaueren Integrationsroutine durch. Danach lautet der iterative Lösungsprozeß dann:

$$V_1{}^i = (A_1)^{-1}\, C_1\, R_1{}^i$$

$$V_2{}^i = (A_2)^{-1}\, C_2\, R_2{}^i \qquad (2.60)$$

wobei für i>0 in $R_1{}^i$ der Gradient des Potentials $V_2{}^{i-1}$ auf ∂G_1 und in $R_2{}^i$ der Gradient des Potentials $V_1{}^i$ auf ∂G_2 enthalten ist.

Auf Grund der Linearität des Problems läßt sich eine Konvergenzrate abschätzen. Da z.B. bei Verwendung des Kreisringverfahrens der Potentialgradient über die Ringladungen linear von den Potentialwerten abhängt, gilt:

$$V_k{}^i = M_k\, V_k{}^{i-1} \qquad k=1,2 \qquad (2.61)$$

wobei M_k eine Matrix ist, die sich aus einer Folge von Matrizenmultiplikationen ergibt und charakteristisch für die spezielle Geometrie ist. Mit der auf Matrizen verallgemeinerten Dreiecksungleichung kann man dann mit $\beta := \|M\|$ folgende Abschätzung durchführen:

$$\|V_k{}^i\| \leq \beta\, \|V_k{}^{i-1}\| \qquad k=1,2 \qquad (2.62)$$

wobei $\|V_k{}^i\| = \left[\sum_{j=1}^{N_k} ((V_k{}^i(\underline{u}_j))^2/N_k\right]^{1/2}$ ist. In Fig.12 wird als Beispiel die Konvergenzrate β einer Anordnung aus zwei Ringkernen mit $\mu=10^4$ in Abhängigkeit vom Abstand d der beiden Ringkerne gezeigt. Die angegebenen Linearabmessungen

sind Relativgrößen, denn die Konvergenzrate hängt nur von den dimensionslosen Verhältnissen der Linearabmessungen und nicht von ihren absoluten Werten ab.

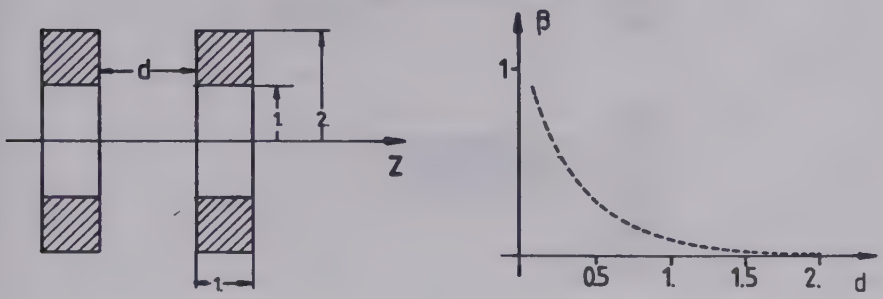

Fig.12: Konvergenzrate der Iteration b) für die im Achsenschnitt dargestellte Konfiguration a)

In Fig.13 wird der gesamte Potentialverlauf einer Sattelspule mit zylindrischem Eisenkern gezeigt, in dessen Nähe sich noch eine Abschirmplatte befindet. Die Potentiallinien sind wegen der cosinusförmigen Wicklungsdichte der Spule im Schnitt mit der (z,y)-Ebene gezeichnet. Sie entsprechen in der (z,r)-Ebene dem Verlauf von $|V_1(z,r)|$. Fig.13a stellt zunächst einmal die Anordnung vor, die wir berechnen wollen. In Fig.13b ist der Potentialverlauf V_1^0 eingezeichnet. Fig.13c und Fig.13d zeigen den gesamten Potentialverlauf der Anordnung bei die Abschirmplatte einmal aus Eisen ($\mu >> 1$) und zum andern Mal aus einem Supraleiter ($\mu = 0$) besteht.

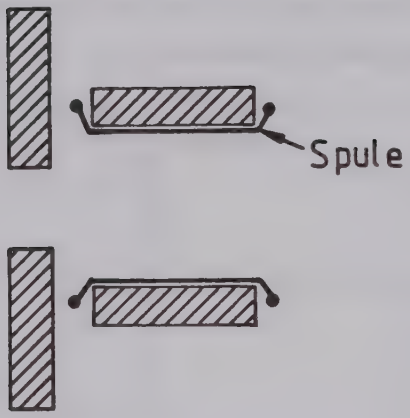

Fig.13a: Anordnung aus einer Sattelspule mit ringförmigem Eisenjoch und Abschirmplatte im Längsschnitt

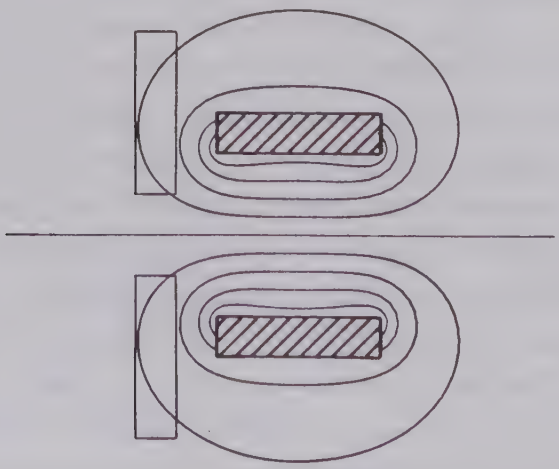

Fig.13b: Start des Iterationsverfahrens; man sieht das Potentialfeld des Joches bei Nichtbeachtung der Abschirmplatte

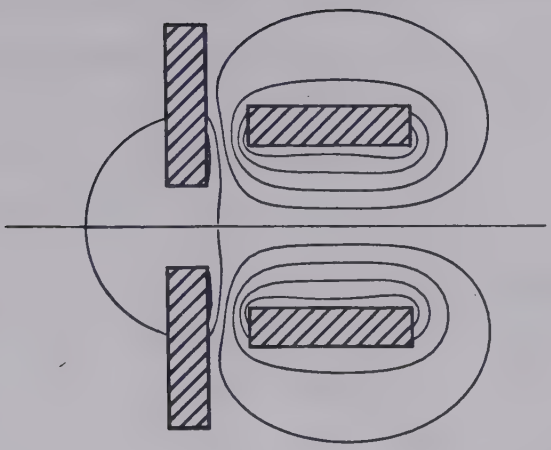

Fig.13c: Ausiteriertes Potentialfeld bei ferromagnetischer Abschirmplatte

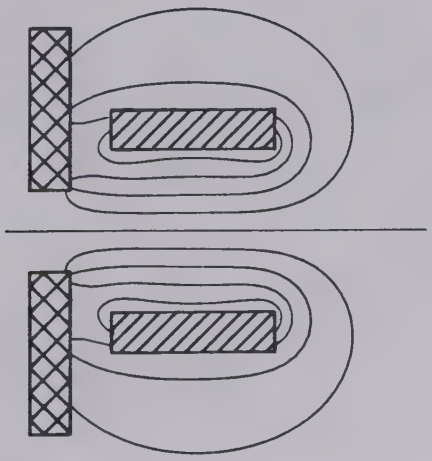

Fig.13d: Ausiteriertes Potentialfeld bei supraleitender Abschirmplatte

Fig.14 zeigt die Konvergenzrate β der Anordnung aus Fig.13 in Abhängigkeit von der Permeabilität der Abschirmplatte. Die Permeabilität des ersten Bauteils ist dabei konstant $\mu = 10^4$.

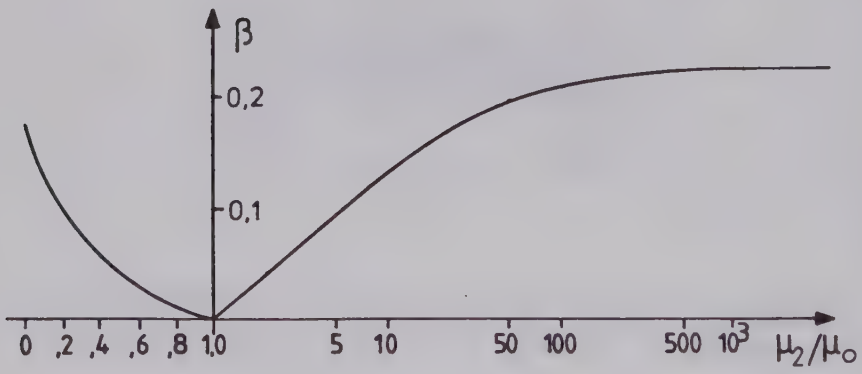

Fig.14: Konvergenzrate β der Anordnung aus Fig.13 in Abhängigkeit vom μ-Wert der Abschirmplatte

3. Berechnung des H_o-Feldes in Ablenksystemen

Im weiteren Verlauf der Arbeit sollen Eigenschaften magnetischer Ablenksysteme untersucht werden. Fig.7a und Fig.7b veranschaulichen den räumlichen Verlauf von einigen repräsentativen Wicklungen auf einem Ring. Der Verlauf eines herausgegriffenen meridionalen Stromfadens sei durch einen Polygonzug aus N Geradenstücken im betreffenden (z,r)-Schnitt beschrieben. Das i-te Geradenstück verlaufe von (z_i,r_i) nach (z_{i+1},r_{i+1}) mit dem Richtungsvektor $\underline{t}_i=(t_z{}^i,t_r{}^i)$ und habe die Länge s_i; (i=1,...,N). Bei Toroidspulen sind die Wicklungen in der betreffenden Meridianebene geschlossen, sodaß $(z_{N+1},r_{N+1})=(z_1,r_1)$ gilt. Bei Sattelspulen ist der Stromkreis nicht in einer Ebene geschlossen; hier erfolgt die Weiterführung des Stromes in Bügeln aus Kreissegmenten, die mit den Koordinaten $(Z,R)=(z_i,r_i)$; i=1,(N+1) und variablem φ festgelegt sind (siehe Fig.15).

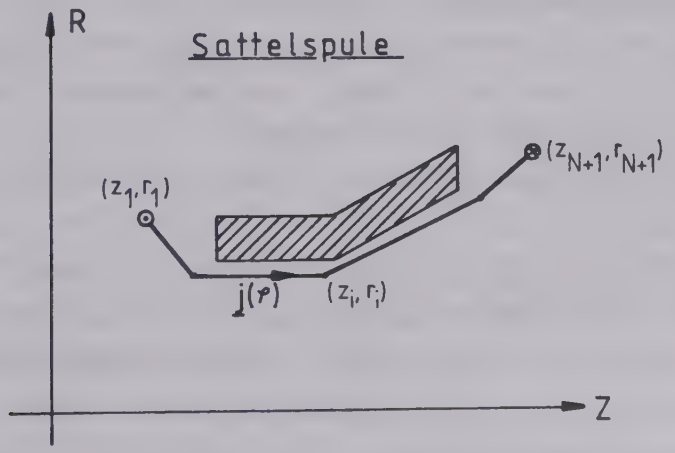

Fig.15: Lage eines Teils einer Wicklung in der betreffenden Meridianebene

Durch azimutale Überlagerung solcher Wicklungen erhält man die winkelabhängige Wicklungsdichte $w(\varphi)$. Wir wollen hier die Wicklungsdichte der meridionalen Stromverläufe als $w(\varphi)=w_o\cos\varphi$ annehmen, womit wir die niedrigste Fourierkomponente eines Ablenkfeldes beschreiben. Die cosinusförmige Wicklungsdichte ergibt ein Ablenkfeld, das geladene Teilchen in x-Richtung ablenkt. Die Feldstärke für die Ablenkung in eine beliebige andere Richtung erhält man dann durch Drehung des so berechneten Feldes.

3.1. H_o-Feld der meridionalen Stromverläufe

Die folgenden Überlegungen gelten zunächst für die Berechnung des Feldes eines geradlinigen Leiterstückes mit dem Index i in einer festen Meridianebene mit dem Azimut φ'. Daraus ergibt sich dann das Feld $\underline{H}_i$ aller mit dem gemeinsamen Index i bezeichneten Geradenstücke durch Integration über die Wicklungsdichte $w(\varphi')$. Das gesamte H_o-Feld erhält man dann durch Summation der so berechneten Felder $\underline{H}_i(\underline{r})$ über $i=1,\ldots,N$. Dabei sei $\underline{r} = r\underline{e}_r(\varphi) + z\underline{e}_z$ der Aufpunkt, in dem wir die Feldstärke berechnen wollen.

Das i-te Leiterstück führe den Strom i_o und sei durch $\underline{r}'=\underline{r}_i+s\cdot\underline{t}_i$ mit $0 \le s \le s_i$, $\underline{r}_i = r_i\underline{e}_r'(\varphi') + z_i\underline{e}_z$ und $\underline{t}_i=t_r{}^i\,\underline{e}_r'+t_z{}^i\,\underline{e}_z$ beschrieben. Der Strom in diesem Leiter erzeugt im Aufpunkt $\underline{r}$ das Feld $\underline{h}_i(\underline{r})$. Der Kürze halber wird der Index i dort fortgelassen, wo keine Mißverständnisse auftreten können. Mit $\underline{t}_i\times(\underline{r}-\underline{r}')=\underline{t}_i\times(\underline{r}-\underline{r}_i)$ gilt nach dem Biot-Savartschen Gesetz:

$$\underline{h}_i(\underline{r}) = \frac{i_o}{4\pi}\ \underline{t}_i \times (\underline{r}-\underline{r}_i) \int_0^{s_i} \frac{ds}{D^3} \quad . \tag{3.1}$$

Dabei ist nach (2.14) $D=|\underline{r}-\underline{r}'|$ mit $\alpha = \varphi - \varphi'$. Die Integration (3.1) läßt sich analytisch ausführen. Dazu definieren wir:

$$a_1 := (z-z_i)^2 + r^2 + r_i{}^2 - 2\, r_i r \cos\alpha = |\underline{r}-\underline{r}_i|^2$$

$$a_2 := r_i t_r{}^i - (z-z_i) t_z{}^i - t_r{}^i\, r \cos\alpha = \underline{t}_i \cdot (\underline{r}_i - \underline{r})$$

$$F(\cos\alpha) := \int_0^{s_i} \frac{ds}{D^3} = \int_0^{s_i} \frac{ds}{(a_1+2a_2 s+s^2)^{3/2}} \tag{3.2}$$

$$= \frac{1}{(a_1-a_2{}^2)} \left\{ \frac{s_i+a_2}{\sqrt{(a_1+2a_2 s_i+s_i{}^2)}} - \frac{a_2}{\sqrt{a_1}} \right\} .$$

Damit erhalten wir:

$$\underline{h}_i(\underline{r}) = \frac{i_o}{4\pi}\ \underline{t}_i \times (\underline{r}-\underline{r}_i) \cdot F(\cos\alpha) \quad . \tag{3.3}$$

$F(\cos\alpha)$ ist in α symmetrisch.

Bis jetzt haben wir nur den Stromverlauf eines einzigen Leiterstücks berechnet. Wie bereits in den Vorbemerkungen erwähnt, seien jetzt viele dieser Leiter so gewickelt, daß sich die azimutale Wicklungsdichte $w(\varphi')=w_o\cos\varphi'$ ergibt. Das Feld aller mit dem Index i bezeichneten Geradenstücke erhält man dann durch Integration über die Wicklungsdichte:

$$\underline{H}_i(\underline{r}) = \int_0^{2\pi} \underline{h}_i(\underline{r})\, w(\varphi')\, d\varphi' \qquad (3.4)$$

$$= \frac{i_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} F(\cos\alpha)\, \underline{t}_i \times (\underline{r}-\underline{r}_i)\, w(\varphi')\, d\varphi' .$$

Dabei hängen $\underline{r}_i$ und $\underline{t}_i$ vom Winkel φ' ab. Unter Beachtung von:

$$\underline{e}_\varphi = -\sin\varphi\, \underline{e}_x + \cos\varphi\, \underline{e}_y , \quad \underline{e}_{\varphi'} = -\sin\varphi'\, \underline{e}_x + \cos\varphi'\, \underline{e}_y \qquad (3.5)$$

$$\underline{e}_r = \cos\varphi\, \underline{e}_x + \sin\varphi\, \underline{e}_y , \quad \underline{e}_{r'} = \cos\varphi'\, \underline{e}_x + \sin\varphi'\, \underline{e}_y$$

sowie der Beziehung:

$$\underline{t}_i \times (\underline{r}-\underline{r}') = \underline{t}_i \times (\underline{r}-\underline{r}_i) \qquad (3.7)$$

$$= t_z{}^i\, r\, \underline{e}_\varphi - q\, \underline{e}_{\varphi'} + t_r{}^i\, r \sin\alpha\, \underline{e}_z$$

mit $q := t_r{}^i\, (z-z_i) + t_z{}^i\, r_i$, erhalten wir nach elementarer Rechnung unter Berücksichtigung der Symmetrie von $F(\cos\alpha)$ in α und der cosinusförmigen Wicklungsdichte:

$$\underline{H}_i = \frac{i_0 w_0}{4\pi} \left\{ (A + B\cos^2\varphi)\underline{e}_y - B \sin\varphi\cos\varphi\, \underline{e}_x + C \sin\varphi\, \underline{e}_z \right\} \qquad (3.8)$$

wobei gilt:

$$A := -q \int_0^{2\pi} F(\cos\alpha)\, \sin^2\alpha\, d\alpha$$

$$B := t_z{}^i\, r \int_0^{2\pi} F(\cos\alpha)\cos\alpha\, d\alpha \; - q \int_0^{2\pi} F(\cos\alpha)\, (2\cos^2\alpha - 1)\, d\alpha$$

$$C := t_r{}^i\, r \int_0^{2\pi} F(\cos\alpha)\, \sin^2\alpha\, d\alpha$$

Im Anhang 3 wird gezeigt, wie die Ausdrücke mit den Winkelfunktionen in (3.8) zustande kommen. Für $r \to 0$ gilt $B \to 0$ und $C \to 0$, sodaß die Ablenkfeldstärke auf der Achse durch A bestimmt ist.

Die Schnelligkeit von Bahnberechnungen geladener Teilchen hängt wesentlich von der Feldberechnung ab. Zur schnellen Feldberechnung im paraxialen Bereich kann man folgendermaßen vorgehen. In den Integralen, welche die Koeffizienten A, B und C bestimmen, wird die Funktion $F(\cos\alpha)$ nach $r \cdot \cos\alpha$ entwickelt. Man erhält dann die Reihe $F(\cos\alpha) = \sum_i f_i r^i \cos^i\alpha$, wobei die f_i Funktionen sind, die von z und r abhängen und auf der Achse einen endlichen Wert haben. Im paraxialen Bereich kann man die Reihe nach wenigen Gliedern abbrechen. Die Integration über α wird analytisch ausgeführt.

In die Integralgleichung selbst geht nur das Produkt $\underline{n} \cdot \underline{H}_i$ ein. Mit $\underline{n} = n_r(\cos\varphi\ \underline{e}_x + \sin\varphi\ \underline{e}_y) + n_z \underline{e}_z$ gilt damit:

$$\underline{n} \cdot \underline{H}_i = \frac{i_o w_o}{4\pi} (n_r A + n_z C) \sin\varphi \qquad (3.9)$$

d.h. die höheren Multipolterme von $\underline{H}_i$ treten bei cosinusförmiger Wicklungsdichte $w(\varphi)$ im Produkt $\underline{n} \cdot \underline{H}_i$ und rotationssymmetrischer Berandung nicht auf.

Für Toroidspulen erhält man letztlich für das gesamte H_o-Feld die Beziehung:

$$\underline{H}_o(\underline{r}) = \sum_{i=1}^{N} \underline{H}_i(\underline{r}) \ . \qquad (3.10)$$

Die zusätzlichen Feldbeiträge, die durch die Bügel von Sattelspulen zustande kommen, werden im nächsten Abschnitt behandelt.

3.2. Feldstärke eines azimutalen Stromverlaufs

Wir werden jetzt den Feldanteil der azimutalen Bügel von Sattelspulen berechnen. Dazu nehmen wir die Leiter als so dünn an, daß sie als ein einziger ringförmiger Leiter mit den Koordinaten $(Z,R)=(z_i,r_i)$; $i=1,(N+1)$ und variablem Azimut betrachtet werden können. Mit dieser Stromführung erhalten wir dann einen winkelabhängigen Strom. Wenn $w(\varphi')$ die Wicklungsdichte der meridionalen Wicklung ist, so gilt für den Gesamtstrom in einem Bügel:

$$i(\varphi) = \pm\, i_o \int_{\varphi_o}^{\varphi} w(\varphi')\, d\varphi' \quad . \tag{3.11}$$

Dabei ist φ_o der Winkel, von dem an die meridionalen Leiter in einen gemeinsamen azimutalen Umlaufsinn umgebogen werden. Für den in (3.1) behandelten Fall der cosinusförmigen Wicklungsdichte gilt mit $\varphi_o=0$:

$$i(\varphi) = \pm\, i_o \cdot w_o \sin\varphi \quad . \tag{3.12}$$

Durch den Bügel mit dem Index i=1 bzw. (N+1) erhalten wir folgenden Feldbeitrag:

$$\underline{H}^b{}_i(\underline{r}) = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{i(\varphi')\ \underline{e}_{\varphi'} \times (\underline{r}-\underline{r}')}{D^3}\, d\varphi' \quad . \tag{3.13}$$

Dabei ist D der Abstand zwischen dem Aufpunkt $\underline{r}$ und dem auf dem Bügel mit φ' umlaufenden Punkt. Setzen wir $i(\varphi')=\pm i_o w_o \sin\varphi'$ in (3.13) ein, so erhalten wir mit $\underline{e}_{\varphi'} \times (r-r') = (z-Z)\underline{e}_{r'} + (R-r\cos\alpha)\underline{e}_z$ unter Berücksichtigung von (3.6):

$$\underline{H}^b{}_i(\underline{r}) = \pm \frac{i_o w_o}{4\pi} R\left\{ \int_0^{2\pi} \frac{(z-Z)(\cos\varphi' \underline{e}_x + \sin\varphi' \underline{e}_y) \sin\varphi'}{D^3} \, d\varphi' \right.$$

$$\left. + \int_0^{2\pi} \frac{(R - r\cos\alpha) \sin\varphi' \, \underline{e}_z}{D^3} \, d\varphi' \right\} . \qquad (3.14)$$

Nach elementarer Rechnung erhält man (siehe Anhang 3):

$$\underline{H}^b{}_i(\underline{r}) = \pm \frac{i_o w_o}{4\pi} R \left\{ ((z-Z)I_2 - (z-Z)(2I_2 - I_o)\cos^2\varphi)\underline{e}_y \right. \qquad (3.15)$$

$$+ (z-Z)(2I_2 - I_o)\cos\varphi \sin\varphi \, \underline{e}_x$$

$$\left. + (R\, I_1 - r\, I_2) \sin\varphi \, \underline{e}_z \right\}$$

mit den in (2.26) definierten I_o, I_1 und I_2. Der in der Integralgleichung auftretende Term lautet:

$$\underline{n} \cdot \underline{H}^b{}_i = \pm \frac{i_o w_o}{4\pi} R \, (n_r(z-Z)I_2 + n_z(R\, I_1 - r\, I_2)) \sin\varphi \quad . \qquad (3.16)$$

Dieser Term zeigt die gleichen Symmetrieeigenschaften wie (3.9). Für $r \to 0$ treten in (3.15) Ausdrücke auf, die im Fall einer Berechnung nach (2.27) numerisch instabil sind, da mit $r=0$ auch $k^2=0$ gilt. Die Integrale I_1 und I_2, die endliche Werte annehmen sollen, werden dann aus einer Differenz zweier gegen unendlich gehender Zahlen berechnet. Deshalb entwickeln wir für kleine Werte von r das H_o-Feld in eine Reihe. Mit $b = ((z-Z)^2 + R^2 + r^2)^{-1}$ und $v = 2rR \cdot b$ gilt:

$$I_j = b^{3/2} \int_0^{2\pi} \frac{(\cos\alpha)^j \, d\alpha}{(1 - v\cdot\cos\alpha)^{3/2}} \quad . \qquad (3.17)$$

Eine Entwicklung des Nenners des Integranden nach $v\cdot\cos\alpha$ ergibt:

$$(1-v\cdot\cos\alpha)^{-3/2} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a(i)/i!\; v^i \cos^i\alpha \qquad (3.18)$$

$$a(i) := (3/2)\;(3/2+1)\cdots(3/2+i-1)$$

Die Entwicklung (3.18) setzen wir in (3.17) ein und integrieren über α. Bei der Integration beachten wir:

$$\int_0^{2\pi} (\cos x)^{2k}\, dx = 2\pi\, \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}$$

$$\int_0^{2\pi} (\cos x)^{2k+1}\, dx = 0$$

Mit $I_p := 2I_2 - I_o$ erhält man dann nach einigen elementaren Umformungen:

$$I_1 = \pi\, b^{3/2} \sum_{i=1}^{\infty} (1-(-1)^i)\, \frac{a(i)\cdot v^i}{(i+1)\cdot((i-1)!!)^2}$$

$$I_2 = \pi\, b^{3/2} \left[\, 1 + \sum_{i=1}^{\infty} (1+(-1)^i)\, \frac{a(i)\cdot(i+1)\cdot v^i}{(i+2)\cdot(i!!)^2} \,\right] \qquad (3.19)$$

$$I_p = \pi\, b^{3/2} \sum_{i=1}^{\infty} (1+(-1)^i)\, \frac{a(i)\cdot i\cdot v^i}{(i+2)\cdot(i!!)^2}$$

Die Entwicklung nach v entspricht im wesentlichen einer Entwicklung nach r, denn mit $r \to 0$ gilt $v \sim r$. Die angegebene Reihenentwicklung kann ebenfalls zur schnellen Feldberechnung im achsennahen Bereich verwendet werden.

Damit ergibt sich das gesamte H_o-Feld einer Sattelspule zu:

$$\underline{H}_o(\underline{r}) = \underline{H}^b{}_1(\underline{r}) + \underline{H}^b{}_{N+1}(\underline{r}) + \sum_{i=1}^{N} \underline{H}_i(\underline{r}) \qquad (3.20)$$

3.3. Erweiterung auf beliebige Wicklungsdichten

Bis jetzt haben wir die Feldstärke für einen rein cosinusförmigen Wicklungsverlauf berechnet. Bei realen Wicklungen treten aber, technisch bedingt, zusätzliche Multipolterme in der Wicklungsdichte auf. Im folgenden werden wir die Feldberechnung einer bezüglich $\varphi'=0$ symmetrischen Wicklungsdichte beschreiben. Für diese ist (bei Sattelspulen $m>0$):

$$w(\varphi') = \sum_m w_m \cos(m\varphi') \,. \tag{3.21}$$

Bei unsymmetrischen Wicklungen treten zusätzlich Terme mit $\sin(m\varphi')$ auf. Da man diese völlig analog zu den Termen mit $\cos(m\varphi')$ behandeln kann, werden sie der Kürze halber hier nicht explizit behandelt.

Zunächst berechnen wir wieder das Feld des mit dem Index i gekennzeichneten geradlinigen Wicklungsteils. Mit den im Abschnitt 3.1. definierten Größen gilt nach (3.4):

$$\underline{H}_i(\underline{r}) = \sum_m \frac{i_0 w_m}{4\pi} \int_0^{2\pi} \underline{t}_i \times (\underline{r}-\underline{r}_i)\, F(\alpha) \cos(m\varphi')\, d\varphi' \,. \tag{3.22}$$

Mit $\cos(m\varphi') = \cos(m\varphi)\cos(m\alpha) + \sin(m\varphi)\sin(m\alpha)$ gilt unter Beachtung der Symmetrie der einzelnen Terme:

$$\int_0^{2\pi} F(\alpha)\cos(m\varphi')\, d\varphi' = \cos(m\varphi) C_m \tag{3.23}$$

$$\int_0^{2\pi} F(\alpha)\sin\alpha\cos(m\varphi')\, d\varphi' = \frac{1}{2}\sin(m\varphi)(C_{m-1}-C_{m+1})$$

$$\int_0^{2\pi} F(\alpha)\cos\varphi'\cos(m\varphi')\, d\varphi' = \frac{1}{2}\left[\cos((m-1)\varphi)C_{m-1} + \cos((m+1)\varphi)C_{m+1}\right]$$

$$\int_0^{2\pi} F(\alpha)\sin\varphi'\cos(m\varphi')\, d\varphi' = \frac{1}{2}\left[\sin((m+1)\varphi)C_{m+1} - \sin((m-1)\varphi)C_{m-1}\right]$$

wobei

$$C_m := \int_0^{2\pi} F(\alpha)\cos(m\alpha)\,d\alpha \tag{3.24}$$

gilt. Daraus folgt mit den Beziehungen (3.5) und (3.6) durch Einsetzen in (3.22):

$$\begin{aligned}\underline{H}_i(\underline{r}) = \sum_m \frac{i_o w_m}{8\pi} \Big\{ &\left[t_r{}^i\, r \sin(m\varphi)(C_{m-1}-C_{m+1})\right] \underline{e}_z \\ &+\left[t_z{}^i\, r\,(\sin((m-1)\varphi)-\sin((m+1)\varphi)C_m\right. \\ &\quad \left.-q\,(\sin((m-1)\varphi)C_{m-1}-\sin((m+1)\varphi)C_{m+1})\right] \underline{e}_x \\ &+\left[t_z{}^i\, r\,(\cos((m+1)\varphi)+\cos((m-1)\varphi))\,C_m\right. \\ &\quad \left.-q\,(\cos((m-1)\varphi)C_{m-1}+\cos((m+1)\varphi)C_{m+1})\right] \underline{e}_y \Big\}\end{aligned} \tag{3.25}$$

Der in die Integralgleichung eingehende Term $\underline{n}\cdot\underline{H}_i$ ergibt:

$$\underline{n}\cdot\underline{H}_i(\underline{r}) = \sum_m \frac{i_o w_m}{8\pi} (n_z t_r{}^i r - n_r q)\cdot(C_{m-1}-C_{m+1})\sin(m\varphi)\,. \tag{3.26}$$

Im weiteren Verlauf des Abschnitts behandeln wir jetzt noch den durch die bei Sattelspulen vorkommenden Bügel hervorgerufenen Feldanteil. Aus (3.11) folgt mit (3.21)

$$i(\varphi') = \pm\, i_o \sum_m \frac{w_m}{m} \sin(m\varphi')\,. \tag{3.27}$$

Anstatt Gleichung (3.14) berechnet sich der Feldanteil eines Bügels nun zu:

$$\underline{H}^b{}_i(\underline{r}) = \pm\sum_m \frac{i_o w_m}{4\pi m} R\Big\{ \int_0^{2\pi} \frac{(z-Z)(\cos\varphi'\underline{e}_x+\sin\varphi'\underline{e}_y)\sin(m\varphi')}{D^3}\, d\varphi'$$

$$+ \int_0^{2\pi} \frac{(R-r\cdot\cos\alpha)\,\sin(m\varphi')\,\underline{e}_z}{D^3}\, d\varphi'\Big\} \,. \qquad (3.28)$$

Nach elementarer Rechnung folgt dann:

$$\underline{H}^b{}_i(\underline{r}) = \pm\sum_m \frac{i_o w_m}{8\pi m}\cdot R \Big\{ [2R\,S_m - r(S_{m-1}+S_{m+1})]\,\sin(m\varphi)\,\underline{e}_z$$

$$+ (z-Z)\cdot[\sin((m-1)\varphi)S_{m-1}+\sin((m+1)\varphi)S_{m+1}]\,\underline{e}_x$$

$$+ (z-Z)\cdot[\cos((m-1)\varphi)S_{m-1}-\cos((m+1)\varphi)S_{m+1}]\,\underline{e}_y\Big\}$$

Dabei ist:

$$S_m := \int_0^{2\pi} \frac{\cos(m\alpha)}{D^3}\, d\alpha \,.$$

Es gilt:

$$\underline{n}\cdot\underline{H}^b{}_i = \pm\sum_m \frac{i_o w_m}{8\pi m}\cdot R\,[(n_r(z-Z)-n_z r)(S_{m-1}+S_{m+1})+2n_z R\cdot S_m]\,\sin(m\varphi)$$

Aus diesem Term und (3.26) folgt, daß für alle Fourierkomponenten m der Wicklungsdichte auch in der Integralgleichung nur die m-te Fourierkomponente zu berücksichtigen ist.

4. Bildfehlerdarstellung

4.1. Einführung

In nicht rotationssymmetrischen fokussierenden oder abbildenden elektronenoptischen Anordnungen ist eine Bildfehlerdarstellung über Bildfehlerintegrale sehr viel komplizierter als in rotationssymmetrischen. So ist die Zahl der zu berücksichtigenden Bildfehlerkoeffizienten sehr viel höher als im rotationssymmetrischen Fall, da nun auch zusätzliche Fehler nullter, erster, zweiter und dritter Ordnung auftreten. Wenn der Strahlengang z.B. bei Anordnungen, in denen Linsen und Ablenksysteme kombiniert sind, den achsennahen Bereich verläßt, kann es zudem nötig werden, Bildfehler noch höherer Ordnung zu berücksichtigen. Die Ausdrücke für die Bildfehlerintegrale werden dann recht umfangreich und bilden bei der Programmierung eine nicht zu unterschätzende Fehlerquelle.
Ich möchte deshalb im folgenden einen neuen Weg zur Beschreibung der Bildfehler darstellen. Voraussetzung hierfür ist die Verfügbarkeit von Computern, die eine schnelle Bahnberechnung ermöglichen.

4.2. Grundannahmen

Wir betrachten eine elektronenoptische Anordnung als 'Black-Box', deren Eigenschaften durch den Parametersatz $(p_1,\ldots,p_M)$ experimentell oder rechnerisch beeinflußt werden können. Diese Parameter können z.B. geometrische Daten der

Anordnung, Linsen- beziehungweise Ablenkströme oder sonstige variable Größen sein.

Wir berechnen nun eine endliche Anzahl von Bahnen, die durch die Anordnung verlaufen. Grundsätzlich sollen zwei Möglichkeiten unterschieden werden. Im ersten Fall enthält die Anordnung einen Strahlerzeuger. Hier sind die auf der Kathodenoberfläche definierten Anfangswerte im Parametersatz p_i enthalten. Im zweiten Fall treten freie Elektronen aus dem Vakuum in die Anordnung ein. Hier geben wir in einer Eintrittsebene $z=z_s$ die Anfangsorte $(x_i(z_s),y_i(z_s))$; $i=0,\ldots,N$ Anfangssteigungen $(x'_i(z_s),y'_i(z_s))$ und die Energien E_i von N Bahnen vor. Diese Anfangswerte ergeben sich je nach Voraussetzung entweder durch eine vorangehende Anordnung oder andere sinnvolle Annahmen. Ist die Anordnung eine von mehreren Stufen eines abbildenden Systems, so folgen diese Anfangswerte aus den Abbildungseigenschaften der vorangehenden Stufen. Das betrachtete Teilsystem kann dann eine Abbildung eines Objekts oder eines Zwischenbildes erzeugen. Die nachfolgenden Betrachtungen gelten in diesem Fall für Elektronenbündel, die von einzelnen, repräsentativ ausgewählten Objektpunkten ausgehen.

Handelt es sich um ein Ablenksystem mit oder ohne fokussierende Linsen, so wird im allgemeinen keine Abbildung, sondern stigmatische Fokussierung in einer Registrier- oder Referenzebene angestrebt. Wir wollen alle Begriffe der geometrischen Optik wie der Gaußschen Bildebene, der Apertur und des Bildpunkts übernehmen. Ist der Bildpunkt derjenige Punkt in der Registrierebene, in den das abgelenkte Bündel fokussiert wird, so wollen wir die dabei auftretende Abwei-

chung der einzelnen Bahnen vom Bildpunkt ebenfalls als Bildfehler bezeichnen.
Tritt auf der Eingangsseite ein engster Bündelquerschnitt (crossover) auf, so ist es nicht notwendig, ihn in viele Bildpunkte zu zerlegen, um die im weiteren Strahlverlauf auftretenden Bildfehler zu studieren. Vielmehr wird das Bündel durch eine endliche Zahl von repräsentativen Bahnen mit verschiedenen Anfangsbedingungen, d.h. Anfangsorten, Anfangssteigungen und Energien beschrieben.

Im weiteren Verlauf interessieren wir uns für die Abmessungen des Bündelquerschnitts in zur optischen (z-)Achse senkrechten Ebenen. Wir berücksichtigen die Stromdichteverteilung und die Energieverteilung eines Elektronenbündels, indem wir eine endliche Zahl von repräsentativen Bahnen berechnen, deren i-te wir mit dem positiven Gewicht g_i versehen. Die Werte g_i können beispielsweise so bestimmt werden, daß sie zu unterschiedlichen Bündeleigenschaften das Ergebnis einer numerischen Integration über kontinuierliche Verteilungen der Scharparameter optimal approximieren. Die Gewichte seien normiert, d.h. es gilt: $\sum_i g_i = 1$. Die Bahn mit dem Index i=0 sei die Zentralbahn; darunter wollen wir eine geometrisch optische Bahn der Energie E_o mit einem ausgezeichneten Wert der Anfangsrichtung (beispielsweise, aber nicht notwendig senkrecht zur Eintrittsebene) verstehen. Die Steigungen der anderen Bahnen sollen in der Eintrittsebene bis zum vollen Aperturwinkel von der Anfangsrichtung dieser Zentralbahn abweichen. Die Energiewerte E_i sollen bis zur Energiebreite ΔE von der Energie E_o abweichen können. Den Mittelpunkt der Aberrationsfigur definieren wir durch:

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}(z) &:= \sum_i g_i \, x_i(z) \\ \bar{y}(z) &:= \sum_i g_i \, y_i(z) \end{aligned}\right\} \qquad (4.1)$$

Mit den Hilfskoordinaten $\xi(z):=x-\bar{x}(z)$ und $\eta(z):=y-\bar{y}(z)$ definieren wir ferner die Matrixelemente:

$$\left.\begin{aligned} S_{xx} &:= \sum_i g_i \, (\xi_i(z))^2 \\ S_{yy} &:= \sum_i g_i \, (\eta_i(z))^2 \\ S_{xy} = S_{yx} &:= \sum_i g_i \, \xi_i(z) \cdot \eta_i(z) \end{aligned}\right\} \qquad (4.2)$$

wobei speziell $\xi_i(z)=x_i(z)-\bar{x}(z)$ und $\eta_i(z)=y_i(z)-\bar{y}(z)$ gelte. S_{xx} und S_{yy} sind ein Maß für die Standardabweichung des Bildflecks von dessen Mittelpunkt. Im Prinzip wird der Strahlquerschnitt in jeder Ebene z=const durch eine Ellipse approximiert, deren Achsenlängen und Orientierung durch obige Matrixelemente bestimmt sind. Mit der Hauptachsentransformation:

$$\left.\begin{aligned} u &= \xi \cos\gamma + \eta \sin\gamma \\ v &= -\xi \sin\gamma + \eta \cos\gamma \\ \gamma &= 0.5 \arctan(2S_{xy}/(S_{xx}-S_{yy})) \end{aligned}\right\} \qquad (4.3)$$

erhält man die Diagonalform:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{uv} &= \sigma_{vu} = 0 \\ \sigma_{uu} &= S_{xx}\cos^2\gamma + S_{yy}\sin^2\gamma + 2S_{xy}\sin\gamma\cos\gamma \\ \sigma_{vv} &= S_{xx}\sin^2\gamma + S_{yy}\cos^2\gamma - 2S_{xy}\sin\gamma\cos\gamma \end{aligned}\right\} \quad (4.4)$$

$\sigma_u = \sqrt{\sigma_{uu}}$ und $\sigma_v = \sqrt{\sigma_{vv}}$ sind die Längen der Halbachsen der Ellipse und damit ein Maß für die Abmessungen der Fehlerfigur. Die Standardabweichungen des Bildflecks sind in der Regel kleiner als seine tatsächlichen Extremalausdehnungen. Wir definieren deshalb einen Streckungsfaktor B sowie die Funktionen S_u und S_v:

$$B := \frac{\max_i(\sqrt{\xi_i^2+\eta_i^2})}{\max(\sigma_u,\sigma_v)}$$

$$S_u := B\cdot\sigma_u$$

$$S_v := B\cdot\sigma_v$$

S_u und S_v stellen damit ein Maß für die tatsächliche Ausdehnung des Bildflecks dar. Sind die Durchstoßpunkte der einzelnen Bahnen mit der Ebene z gleichmäßig über den Bildfleck verteilt, so ist B=2 ein guter Näherungswert. Falls man die Bahndaten so wählt, daß das Bündel einen Hohlstrahl beschreibt ist $B=\sqrt{2}$ ein guter Näherungswert. Bezüglich der Transformation (4.3) existieren zwei Invarianten; diese sind:

$$Sp = \frac{2}{B^2}\varrho^2 = S_{xx}+S_{yy} = \sigma_{uu}+\sigma_{vv}$$

und $$F = \sqrt{S_{xx}S_{yy}-(S_{xy})^2} = \sqrt{\sigma_{uu}\sigma_{vv}}.$$

Sp ist die Spur der Matrix, sie ist proportional zum mittleren Radiusquadrat ϱ^2. F ist bis auf auf den Faktor π die Ellipsenfläche. Damit ergibt sich mit w=u,v:

$$\sigma_{ww} = 0.5(Sp \pm (Sp^2 - 4\cdot F^2)^{1/2}).$$

Im feldfreien Raum, ergibt sich eine einfache Abhängigkeit der Matixelemente S_{x_i,x_k} von z, Wir speichern zunächst die (x,y)-Koordinaten der Bahnen und deren Steigungen (x',y') in einer Ebene $z=z_o$ ab. Dann gilt im feldfreien Raum in der Ebene z:

$$\left.\begin{aligned} x_i(z) &= x_i(z_o) + x'_i(z_o)\cdot(z-z_o) \\ y_i(z) &= y_i(z_o) + y'_i(z_o)\cdot(z-z_o) \end{aligned}\right\} \quad (4.5)$$

so daß

$$\bar{x}(z) = \bar{x}(z_o) + \bar{x}'(z_o)\cdot(z-z_o)$$

$$\xi_i(z) = \xi_i(z_o) + \xi'_i(z_o)\cdot(z-z_o) \qquad (i=0,\cdots,N)$$

wobei $\bar{x}'(z_o) = \sum_i g_i\, x'_i(z_o)$

und $\xi'_i(z_o) = x'_i(z_o) - \bar{x}'(z_o)$

ist. $\bar{y}'(z_o)$ und $\eta'_i(z_o)$ berechnen sich entsprechend. Für die Matrixelemente erhält man die quadratischen Funktionen

$$\left.\begin{aligned} S_{xx} &= c_{x1} + c_{x2}\cdot(z-z_o) + c_{x3}\cdot(z-z_o)^2 \\ S_{yy} &= c_{y1} + c_{y2}\cdot(z-z_o) + c_{y3}\cdot(z-z_o)^2 \\ S_{xy} &= c_1 + c_2\cdot(z-z_o) + c_3\cdot(z-z_o)^2 \end{aligned}\right\} \quad (4.6)$$

mit den Koeffizienten:

$$
\left.
\begin{aligned}
c_{x1} &:= \sum_i g_i \, (\xi_i(z_o))^2 \\
c_{x2} &:= 2 \cdot \sum_i g_i \, \xi_i(z_o) \cdot \xi'_i(z_o) \\
c_{x3} &:= \sum_i g_i \, (\xi'_i(z_o))^2
\end{aligned}
\right\} \quad (4.7a)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
c_1 &:= \sum_i g_i \, \xi_i(z_o) \cdot \eta_i(z_o) \\
c_2 &:= \sum_i g_i \, (\xi_i(z_o) \cdot \eta'_i(z_o) + \eta_i(z_o) \cdot \xi'_i(z_o)) \\
c_3 &:= \sum_i g_i \, \xi'_i(z_o) \cdot \eta'_i(z_o)
\end{aligned}
\right\} \quad (4.7b)
$$

Zur Berechnung der c_{yj} ersetzt man in (4.7a) einfach ξ durch η. Man kann in dieser Weise das Elektronenbündel mit Hilfe weniger Parameter beschreiben, inbesondere Abmessungen und Orientierung des Fehlerscheibchens in Abhängigkeit von z. Beispielsweise kann man in dieser Weise untersuchen, ob und wo im feldfreien Raum ein engster Bündelquerschnitt existiert.

Zum Schluß dieses Abschnitts scheint es mir wichtig, noch zwei Anmerkungen zu machen. Die erste bezieht sich auf die Form der Fehlerscheibchen. Durch S_{xx}, S_{yy} und S_{xy} wird jedes Fehlerscheibchen durch eine Ellipse beschrieben (siehe Fig.16). Auf eine genauere Wiedergabe der Form des Bildfehlerscheibchens durch Berechnung der höheren Momente wie etwa S_{xxx} wurde verzichtet, um eine möglichst einfache Beschreibung von Bildfehlern und Algorithmen für Computerprogramme zu erhalten. Im Hinblick auf eine Optimierung von Apparaturen reicht es ja auch aus, wenn die Abmessungen der Fehlerscheibchen bis auf wenige Prozent bekannt sind.

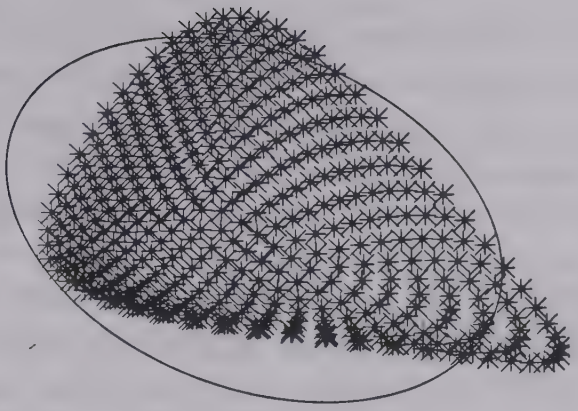

Fig.16: Die Abbildung zeigt ein Beispiel für ein Bildfehlerscheibchen mit der approximierenden Ellipse (Streckungsfaktor B=2). Für das Beispiel wurde ein monoenergetisches Bündel gewählt, dessen Bahnen von einem achsenfernen Punkt ausgehen und sich durch die Koordinaten ihrer Durchstoßpunkte in der Blendenebene unterscheiden.

Die zweite Anmerkung bezieht sich auf die Genauigkeit des Verfahrens. Wir verfügen heute über sehr genaue Programme zur Lösung der Bahngleichung. Damit ist gewährleistet, daß die kleinen Größen, welche sich aus Differenzen von großen Zahlen wie etwa $(x_i - \bar{x})$ ergeben, nicht durch Rundefehler unbrauchbar werden. Im Kapitel 5 sind einige Abbildungen von Randkurven verschiedener Bildfehlerscheibchen abgebildet, die eben aus diesen Differenzen ermittelt wurden. Falls hier Rundefehler eine Rolle spielen würden, könnte der Rand nicht so glatt wiedergegeben werden.

4.3. Bildfehlerauswertung

Eine einzelne Elektronenbahn, beispielsweise die oben definierte "Zentralbahn" $x_o(z), y_o(z)$, verursacht keine Bildfehlerscheibchen. Die in 4.2. dargestellte Beschreibung ist daher nicht anwendbar. Dennoch kann es sinnvoll sein, die Auslenkeigenschaften in einer vorgegebenen Registrierebene $z=z_o$ mit Hilfe von Bildfehlerkoeffizienten zu beschreiben. Die Koordinaten $x(z_b)$ und $y(z_b)$ hängen von Parametern wie Ablenkspannungen, Ablenkströmen der Strahlenergie usw. ab. Wir bezeichnen mit $w_o:=x(z_b)+iy(z_b)$ die tatsächliche komplexe Bahnkoordinate der Zentralbahn; w_o hängt im allgemeinen vom gesamten Parametersatz p_i ab. Im Idealfall ist die Auslenkung jedoch eine einfache lineare Funktion zweier Parameter (etwa der beiden Ablenkströme) die im folgenden mit p_1 und p_2 festgelegt sein sollen. Wenn w_b der ideale Wert der Auslenkung ist, d.h. die gewünschte lineare Funktion der Parameter p_1 und p_2, dann wird die Abweichung $w_b:=w_o-w_b$ als Verzeichnung bezeichnet. Für w_o machen wir den Potenzreihenansatz:

$$w_o = \sum_i \sum_j d_{i,j} (w_b)^i (w_b^*)^j .$$

Die Koeffizienten $d_{i,j}$ werden aus den für eine Anzahl von verschiedenen Parameterwerten numerisch berechneten Bahnpunkten w_o durch Ausgleichsrechnung bestimmt. Sie hängen noch von den Parametern p_i mit $i>2$ ab. Für den Fall, daß die Parameter p_i mit $i>2$ feste unveränderliche Werte besitzen, kann man $d_{0,0}=d_{0,1}=0$ und $d_{1,0}=1$ wählen. Wir verwenden folgende Bezeichnungen:

$d_{0,0}$ konstante Strahlversetzung

$d_{1,0}$ isotrope Drehstreckung

$d_{0,1}$ anisotrope Drehstreckung

$d_{i,j}$ $(i+j > 1)$ Verzeichnungskoeffizienten .

Nachdem man die Auslenkeigenschaften für die Zentralbahn berechnet hat, werden die anderen Bildfehler jetzt kompakt nach dem im Abschnitt 4.2. angegebenen Verfahren behandelt. Dazu betrachten wir im folgenden die Ablenkung eines Bündels von Elektronenstrahlen. Für jeden Satz von Ablenkparametern (z.B. Ablenkströmen) erhält man dann in der Ebene $z=z_b$ einen Bildfleck, dessen Zentralkoordinate w_o, dessen Matrixelemente $S_{x_i x_k}$ und dessen Mittelpunkt $\bar{w}=\bar{x}+i\bar{y}$ von den Ablenkparametern abhängen. Wenn nur zwei unabhängige Ablenkparameter existieren, kann man die Abhängigkeit von den Parametern durch eine Abhängigkeit von der idealen Ablenkung w_b ersetzen. Die Differenz $w_k=\bar{w}-w_o$ bezeichnen wir als "Komalänge". Aus den einzelnen Bildflecken wird dann deutlich, wie sie sich in der Ebene $z=z_b$ in Abhängigkeit von w_b entwickeln (siehe z.B. Fig.19a). Man kann dies für verschiedene Werte von z_b durchführen und hat damit die Möglichkeit, die Entwicklung des Fehlerscheibchens in verschiedenen achsensenkrechten Ebenen zu untersuchen (Fig.19b). Fig.17 zeigt als Beispiel die Abhängigkeit der Halbachsen S_u und S_v von z für drei verschiedene Werte der Sollablenkung $w_b=x_b$ für ein mit einer Linse kombiniertes Ablenksystem. Für $x_b=0$,d.h. für den unausgelenkten Strahl, gilt wegen der Rotationssymmetrie des Feldes und des Bündels $S_u = S_v$.

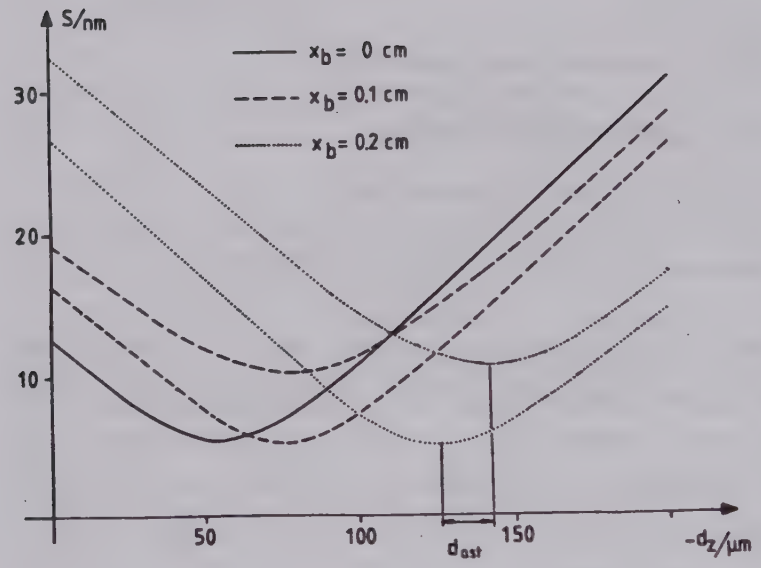

Fig.17: Beispiel für die Abhängigkeit der Größen S_u und S_v von einer Verschiebung $d_z=z-z_o$

Für jeden Bildfleck existiert ein Wert $z=z_a$, für den die Spur Sp der S-Matrix ein Minimum wird. Wenn man sich auf das Verhalten des Bündels im feldfreien Raum beschränkt gilt nach (4.6):

$$z_a = z_o - \frac{c_{x2} + c_{y2}}{2(c_{x3} + c_{y3})} \qquad (4.8)$$

Bei $z=z_a$ durchläuft der mittlere quadratische Radius ein Minimum. Die Abhängigkeit der Lage z_a von den Ablenkparametern bezeichnen wir als Bildfeldwölbung. Sucht man nun die Werte $z=z_u$ und $z=z_v$, bei denen S_u beziehungsweise S_v minimal werden, so erhalten wir die astigmatische Differenz (in Fig.17 für x_b=0.2cm eingezeichnet): $d_{ast}:=z_u-z_v$. Für z_u und z_v läßt sich selbst bei Beschränkung auf das Verhalten des Bündels im feldfreien Raum kein einfacher analytischer Ausdruck

angeben. Da S_u und S_v im feldfreien Raum nur je ein Minimum haben, kann man aber die Minimierung mit einem einfachen Algorithmus wie etwa der Bisektion numerisch durchführen. Falls der Drehwinkel γ von z nicht abhängt, hängen S_{uu} und S_{vv} quadratisch von z ab.
In einer Zusammenfassung gebe ich noch einmal einen Überblick der aus dem gerade beschriebenen Verfahren ermittelbaren Größen.

w_b Lateralkoordinate der gewünschten Auslenkung

w_o tatsächliche Auslenkung eines aperturlosen monochromatischen Elektronenstrahls

δw_b Verzeichnung $\delta w_b = w_o - w_b$

w_k komplexe Komaverschiebung $w_k = \bar{w} - w_o$

z_a axiale Lage der Figur mit kleinstem mittleren quadratischen Radius (axiale Bildfeldwölbung)

$z_u; z_v$ axiale Lagen der Figur, für die je eine der beiden Hauptachsen minimal wird (astigmatischer Abstand $d_{ast} = |z_u - z_v|$)

$S_u; S_v$ Extremalausdehnungen (Öffnungsfehler und restliche Fehler)

γ Orientierungswinkel der Approximationsellipse, (dabei ist $\gamma - \arg(\bar{w})$ der Anisotropiewinkel) .

Dabei hängt w_b von den beiden Ablenkparametern p_1, p_2 und z_b ab. w_o, δw_b, w_k, S_u, S_v und γ können außerdem von weiteren Parametern p_i mit $i>2$ abhängen. z_a, z_u und z_v hängen nur vom

Parametersatz p_i ab. Fig.18 veranschaulicht einige dieser Größen. Die in der obigen Zusammenstellung angegebenen Fehlergrößen betreffen das Elektronenbündel als Ganzes. Das bedeutet, daß die nachträgliche Superposition vieler einzelner Bildfehlerterme entfällt, die in der konventionellen Bildfehlertheorie notwendig ist und die dort häufig - insbesondere bei Optimierungsaufgaben - Schwierigkeiten bereitet. Hierin scheint uns ein besonderer Vorteil der Methode zu liegen.

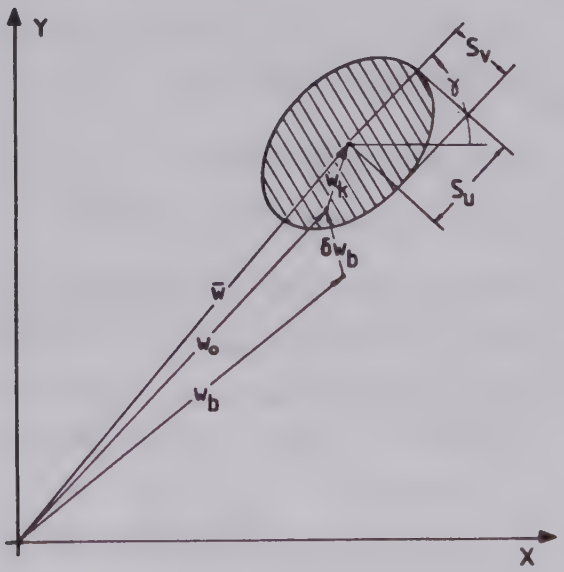

Fig.18: Veranschaulichung einiger der im Kapitel 4 vorkommenden geometrischen Größen

4.4. Beispiele

Die eben geschilderte Methode eignet sich besonders zur Optimierung von Systemen. Eine genaue Ausarbeitung von Kriterien zur Optimierung unterschiedlicher Systeme übersteigt allerdings den Rahmen dieser Arbeit, da sie von vielen technischen Details der jeweilig interessierenden Systeme abhängt. An dieser Stelle hier will ich nur einige skizzenhafte Beispiele geben.

Wir nehmen zunächst eine fest vorgegebene fokussierende oder abbildende Anordnung an. Für diese Anordnung berechnen wir in der Gaußschen Bildebene $z=z_{Gauß}$ einige über den ganzen gewünschten Bildbereich gleichmäßig verteilte Bildflecken. Mit dem oben geschilderten Verfahren können wir jetzt die Lage der Bildebene variieren, bis wir eine optimale z_f gefunden haben. Beispielsweise kann als Opimierungskriterium gefordert werden, daß der Maximaldurchmesser $D_{max}:=\underset{p_1 p_2}{Max}[|S_u+S_v|+|S_u-S_v|]$ minimal wird. Daß die Ebene $z=z_f$ des engsten Bündelquerschnitts im allgemeinen nicht mit der Gaußschen Bildebene zusammenfällt, ist ja beispielsweise für ein nur mit Öffnungsfehler behaftetes rotationssymmetrisches Bündel bekannt (siehe Fig.20).

Fig.19 verdeutlicht folgendes: Fällt die Registrierebene mit der Gaußschen Bildebene zusammen (a), so hat man zwar in der näheren Umgebung der Achse kleine Fehlerscheibchen, doch am Rand des Bildfeldes kann das Fehlerscheibchen durch Bildfeldwölbung und Astigmatismus sehr groß werden. Mit einer Verschiebung der Registrierebene werden zwar die Fehlerscheibchen im achsennahen Bereich größer, gleichzeitig werden sie bei Defokussierung im richtigen Sinn am Rand kleiner

(b). Durch Vermindern der maximalen Größe der Fehlerscheibchen kann somit die Güte eines Ablenksystems verbessert werden.

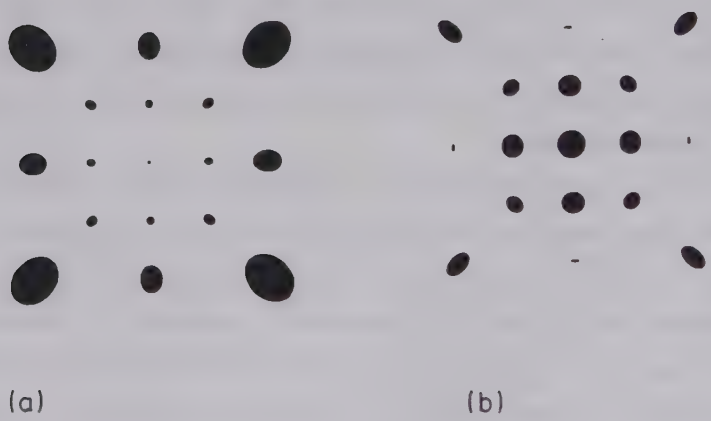

Fig.19: Bildfehlerscheibchen eines monochromatischen Bündels, das durch eine Ablenkspule ausgelenkt wurde; a) in der Gaußschen Bildebene und b) in der Registrierebene, in der D_{max} minimal wird. Die Fehlerscheibchen wurden aus Darstellungsgründen stark vergrößert.

Als nächsten Schritt können wir jetzt durch Variation der einzelnen Parameter p_i, (i=1,...,M) in vorgegebenen Schranken untersuchen, wie sich die Gestalt der Fehlerscheibchen in der jeweiligen Ebene $z=z_f$ in Abhängigkeit von diesen Parametern entwickelt. Durch Minimierung z.B. von D_{max} läßt sich dann ein günstigster Parametersatz bestimmen. Ein einfaches Beispiel dazu wird im Kapitel 5 gezeigt, wo die Spu-

lenlänge von Ablenkspulen für eine astigmatismusfreie Auslenkung optimiert wird.

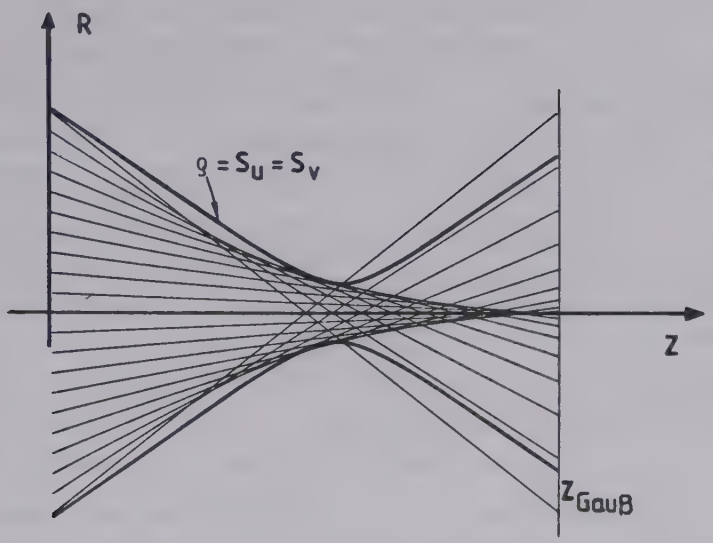

Fig.20: Verlauf der Kaustik und des quadratisch gemittelten Radius beim Öffnungsfehler

Als weiteres Beispiel zeigt Fig.20 den Verlauf von $\varrho = S_u = S_v$ bei einem rotationssymmetrischen Bündel mit Öffnungsfehler. Dieser Fall ist insofern interessant, weil hier eine Kaustik vorliegt. z_o sei die von der Gaußschen Bildebene aus gezählte geometrisch-optische Defokussierung des Kreises kleinster Verwirrung. Man erhält $z_o = -.75 C_s \alpha_o^2 M^2$ durch Berechnung des Schnittpunktes der Randstrahlen mit dem entgegenüberliegenden Zweig der Kaustik. Wenn wir annehmen, daß die kreisförmige Blende gleichmäßig ausgeleuchtet ist, läßt sich die Lage von z_a nach (4.8) analytisch bestimmen. Man erhält hier

die Defokussierung $z_a = \frac{8}{9} z_o$ und für den engsten Querschnitt mit B=2 $\varrho_{min} = \sqrt{\frac{8}{9}} r_o$, wobei $r_o = .25 C_s M \alpha_o^3$ der Radius des Kreises kleinster Verwirrung ist. z_a stimmt nicht exakt mit z_o überein und ϱ_{min} nicht mit r_o, was am statistischen Charakter der S-Funktionen liegt, denn die Lage von ϱ_{min} befindet sich dort, wo die Standardabweichung des Bahnenbündels am kleinsten ist. Bei einem kreisförmigen Strahlquerschnitt stimmen die exakte Ausdehnung des Strahles und ϱ nur dann überein, wenn die Stromdichte im ganzen Strahlquerschnitt konstant ist.

5. Eigenschaften von magnetischen Ablenksystemen

In den beiden folgenden Abschnitten werden Eigenschaften von Toroid- und Sattelspulen unter Verwendung der in den vorhergehenden Kapiteln dargestellten Methoden zur Feldberechnung und zur Bildfehlerdarstellung untersucht. Der letzte Abschnitt dieses Kapitels befaßt sich dann noch mit zeitabhängigen Feldern und Bündeln. Dort wird auch gezeigt, wie sich die Induktivität eines Ablenksystems mit Hilfe der im Kapitel 2 eingeführten Begriffe einfach berechnen läßt.

Zur Berechnung des Feldes nehmen wir eine cosinusförmige Wicklungsdichte an, wodurch wir eine Auslenkung in x-Richtung erhalten. Wenn man zusätzlich eine Auslenkung in y-Richtung betrachten will, muß man noch eine weitere sinusförmige Wicklungsdichte einführen. Wenn dann in beiden Spulen ein Ablenkstrom fließt, kann man die gesamte Wicklung als $w(\varphi)=w_o \cos(\varphi+\varphi_o)$ mit $\varphi_o \neq 0$ beschreiben. Man erhält dann eine Auslenkung in der mit $\varphi=\varphi_o$ definierten Ebene. Deshalb sind die unten beschriebenen Beispiele, die nur eine Auslenkung in der (x,z)-Ebene beschreiben, keine Einschränkung der Allgemeinheit.

5.1. Ablenkeigenschaften und Bildfehler

Wir betrachten zunächst eine Zentralbahn, welche die Eintrittsebene $z=z_s$ in ihrem Achsenpunkt senkrecht durchsetzt. Hat das Ablenkfeld $\underline{B}(\underline{r})$ in der (x,z)-Ebene nur eine y-Komponente, so verläuft die Zentralbahn in dieser Ebene und wird in x-Richtung ausgelenkt. Wir betrachten diese Auslenkung in

einer Ebene $z=z_b$. Dort kann die tatsächliche Auslenkung x_o in eine Potenzreihe nach I entwickelt werden. Unter der Voraussetzung $B_y(x,0,z)=B_y(-x,0,z)$ und $\underline{B}(\underline{r}) \sim I$ gilt:

$$x_o = d\, I + d_3\, I^3 + d_5\, I^5 + \cdots \qquad (5.1)$$

$$= x_b + D_3\, x_b^3 + D_5\, x_b^5 + \cdots$$

wobei $x_b := d \cdot I$ den linearen Teil der Auslenkung beschreibt. Die Differenz $(x_o - x_b)$ ist die Verzeichnung. Die geraden Potenzen von I treten hier aus Symmetriegründen nicht auf. Der Auslenkkoeffizient d berechnet sich zu (siehe Anhang 4):

$$d = - \sqrt{\frac{e}{2m_o U^*}}\, \frac{1}{I} \int_{z_s}^{z_b} (z-z_b)\, B_y(z)\, dz \quad , \qquad (5.2)$$

wobei m_o die Elektronenruhemasse und U^* das relativistisch korrigierte Beschleunigungspotential ist. Im folgenden wollen wir Toroid- und Sattelspulen untersuchen, die einen Innenradius von R_{Sp}=1cm, einen Außenradius von 1.5cm, sowie die Längen L_{Sp}=1cm, 2cm, 3cm und 4cm haben sollen. Eine Sattelspule sei durch S_i und eine Toroidspule durch T_i gekennzeichnet, wobei sich der Index i auf die Länge der Spule beziehen soll; S_2 bezeichnet z.B. eine Sattelspule der Länge 2cm.

Als Koordinatenursprung wird im folgenden der Spulenmittelpunkt gewählt. Mit z_b = 10cm haben die acht berechneten Spulen bei normierter Wicklungsdichte und einer Elektronenenergie von 50 keV folgende Ablenkkoeffizienten:

L_{Sp}/cm	$-d_T/(10^{-2}$cm/Amp)	$-d_S/(10^{-2}$cm/Amp)
1	4.1	3.2
2	5.8	4.8
3	7.5	6.4
4	9.1	8.0

Der Index T bezeichnet Toroidspulen, der Index S Sattelspulen. Wie man sieht, ist der Ablenkkoeffizient d in beiden Fällen eine näherungsweise lineare Funktion der Spulenlänge. Der Verlauf der Feldstärke längs der Achse dieser Ablenkspulen ist in Fig.21 dargestellt. Man sieht deutlich, daß in der Mitte längerer Spulen das Feld näherungsweise homogen wird. Die Felder der Sattelspulen unterscheiden sich von denen der Toroidspulen durch steiler abfallende Flanken.

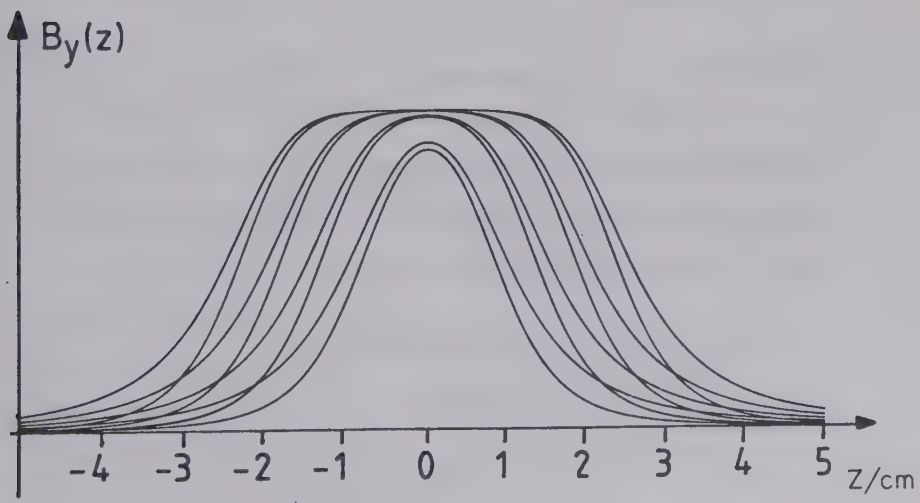

Fig.21: Feldstärken längs der Achse von Toroidspulen (kleinere Flankensteigung) und Sattelspulen (größere Flankensteigung) mit den Längen-Radiusverhältnissen L_{Sp}/R_{Sp} der Spulen von 1, 2, 3, und 4. Für $B_y(z)$ wurden willkürliche Einheiten gewählt.

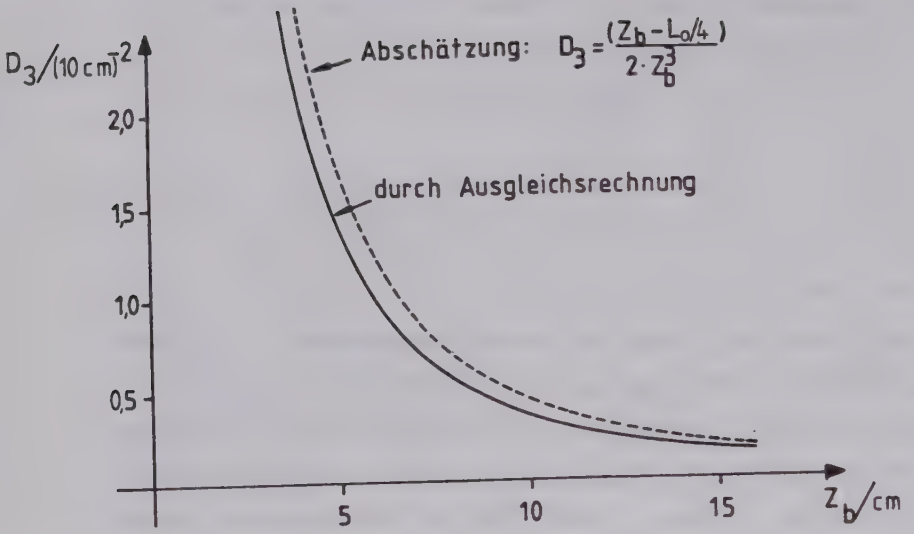

Fig.22: Verzeichnungskoeffizient D_3 als Funktion des Bildschirmabstandes z_b.

Der Koeffizient D_3 in Gleichung (5.1) beschreibt die Verzeichnung 3. Ordnung. Eine einfache analytische Näherung für die Ablenkung $x_o(z_b)$ erhält man, wenn man das Magnetfeld näherungsweise durch ein abgehacktes homogenes Feld ersetzt, für welches $B_x(\underline{r})=B_z(\underline{r})=0$ und

$$B_y(z) = \begin{cases} B_o & \text{für } -L_o/2 < z < L_o/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist. Im Feld ist die Elektronenbahn dann eine Kreislinie mit dem Radius $R=(m\cdot v)/(e\cdot B_o)$. Die Bahngleichung in diesem Bereich lautet:

$$(x-R)^2 + (z+L_o/2)^2 = R^2 . \qquad (5.3)$$

Für $z > L_o/2$ ist die Elektronenbahn eine Gerade durch den Punkt $x(L_o/2) = R-(R^2-L_o^2)^{1/2}$ mit der Steigung $x'=L_o/(R^2-L_o^2)^{1/2}$. In der Bildebene $z=z_b$ gilt dann:

$$x_o = x(z_b) = R(1-\sqrt{1-(L_o/R)^2}) + \frac{L_o(z_b-L_o/2)}{R\sqrt{1-(L_o/R)^2}} \quad . \qquad (5.4)$$

Der Entwicklung (5.1) nach Potenzen von I entspricht hier wegen $I \sim B_o \sim \frac{1}{R}$ eine Entwicklung nach Potenzen von L_o/R:

$$x_o = (L_o/R)z_b + \tfrac{1}{2}(L_o^3/R^3)(z_b-L_o/4) + O(R^{-5}) \quad .$$

Daraus folgt zunächst $x_b = (L_o/R)z_b$ und weiter

$$x_o = x_b + \frac{x_b^3}{2z_b^3}(z_b-L_o/4) + O(x_b^5) \quad .$$

Der Verzeichnungskoeffizient ist also in dieser Näherung:

$$D_3 = \frac{(z_b - L_o/4)}{2\ z_b^3} \quad . \qquad (5.5)$$

Fig.22 zeigt D_3 in Abhängigkeit von z_b für die Sattelspule S_1. Für längere Spulen ($L_{Sp}>R_{Sp}$) ist die Näherung noch besser, da für diese die Annäherung des tatsächlichen Feldes durch das abgehackte homogene besser ist (vergl. Fig.21). In der Abbildung (Fig.22) wird die aus numerisch berechneten Bahnen durch Ausgleichsrechnung gewonnene Kurve der Näherung gegenübergestellt. Dabei wurde als effektive Länge

$$L_o := \frac{1}{B_{max}} \int_{z_s}^{z_b} B_y(z)\, dz \qquad (5.6)$$

in (5.5) eingesetzt. Für die meisten technischen Anwendungen reicht die Näherung aus.

Nachdem wir Auslenkung und Verzeichnung des Zentralstrahls untersucht haben, wollen wir Bildfehlerscheibchen eines konvergenten monoenergetischen homozentrischen Bündels mit der Apertur α berechnen. Wir berechnen N+1 Bahnen von der Ebene $z=z_s$ ausgehende Bahnen. Deren Anfangswerte werden so gewählt, daß ihre Anfangstangenten einen Kegelmantel mit dem Öffnungswinkel 2α bilden, dessen Spitze in der Ebene $z=z_b$ liegt. Die Anfangsbedingungen für die Bahnen sind:

$$x_o(z_s) = y_o(z_s) = 0$$

$$x_o'(z_s) = y_o'(z_s) = 0;$$

sowie für $j=1,\ldots,N$:

$$x_j(z_s) = (z_b-z_s)\tan\alpha\cos(2\pi j/N)$$

$$y_j(z_s) = (z_b-z_s)\tan\alpha\sin(2\pi j/N)$$

$$x_j'(z_s) = -\tan\alpha\cos(2\pi j/N)$$

$$y_j'(z_s) = -\tan\alpha\sin(2\pi j/N).$$

Durch einen Ablenkstrom $I \neq 0$ wird dieses Bündel in x-Richtung abgelenkt. Die Punkte mit den Bahnkoordinaten $(x_i(z_b),y_i(z_b))$, $i=1,\ldots,N$ bilden eine Kurve. Betrachtet man solche Kurven für mehrere Werte der Apertur α, so bildet deren Gesamtheit das Fehlerscheibchen eines zweiparametrigen Bündels. Überschneiden einander die zu verschiedenen Werten der Apertur α gehörigen Kurven, so hat das Bündel eine Hüllkurve (Kaustik) und sein Querschnitt in der Ebene $z=z_b$ eine Hüllkurve, welche das Bildfehlerscheibchen begrenzt.

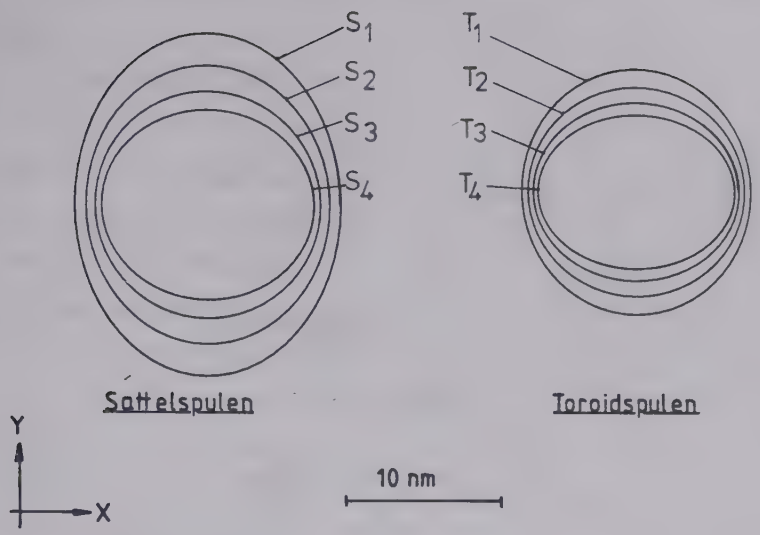

Fig.23: Bildfehlerscheibchen für die Sattelspulen S_1, S_2, S_3 und S_4, sowie für die Toroidspulen T_1, T_2, T_3 und T_4. Die Bildebene liegt bei z_b=10cm, die Auslenkung beträgt 0.1cm und die Bündelapertur ist $\alpha = 5 \cdot 10^{-4}$rad.

Fig.23 zeigt Bildfehlerscheibchen von je vier Toroid- und Sattelspulen in der Bildebene z_b=10cm bei gleicher Auslenkung. Wir sehen, daß bei längeren Spulen kleinere Bildfehlerscheibchen entstehen. Verschieben wir die Registrierebene in die Ebene z_u bzw. z_v, in der S_u bzw. S_v minimal wird, so erhalten wir mit dem speziell festgelegten Wert von α die Randkurven von Fig.24a und Fig.24b. Hier sind auch noch die Randkurven für die Ebene $z=z_a$ eingezeichnet, in der die Spur S_p minimal wird. In Fig.23 und Fig.24 stimmen die Abmessungen der Aberrationsfigur sehr gut mit S_u bzw. S_v überein.

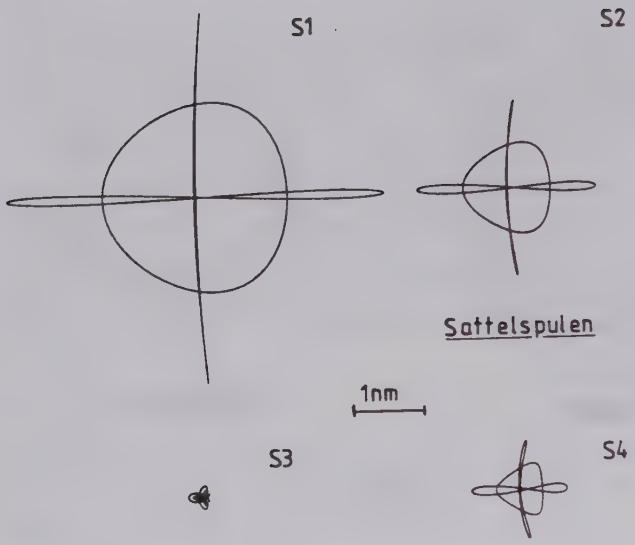

Fig.24a:

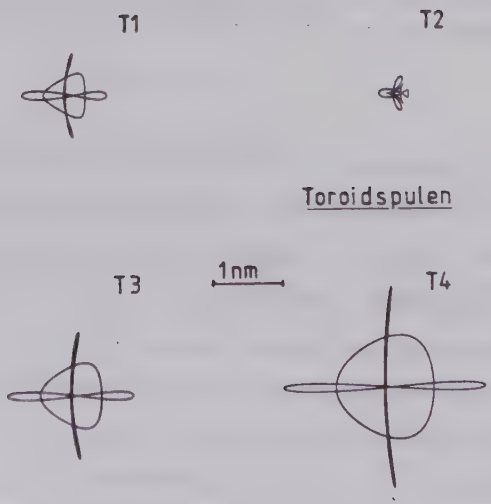

Fig.24b: Randkurven eines Elektronenbündels mit der Apertur $\alpha = 5 \cdot 10^{-4}$ rad in den Ebenen z_u, z_v und z_a.

Das nächste Beispiel betrifft die Optimierung von Ablenksystemen in Hinblick auf minimalen Astigmatismus. Wir suchen eine Ablenkspule, deren Länge zwischen 1cm und 4cm sein darf (etwa aus konstruktionstechnischen Gründen). Der Radius der Ablenkspule sei mit 1cm und die Registrierebene sei mit z_b=10cm fest vorgegeben. Für vier äquidistante Werte der Spulenlänge berechnen wir jetzt nach dem im Kapitel 4 beschriebenen Verfahren z_a und z_v für eine Auslenkung x_b=0.1cm und eine Apertur $\alpha=5\cdot10^{-4}$rad. Die berechneten Werte erlauben eine Darstellung der Abhängigkeit von z_u und z_v von der Spulenlänge.

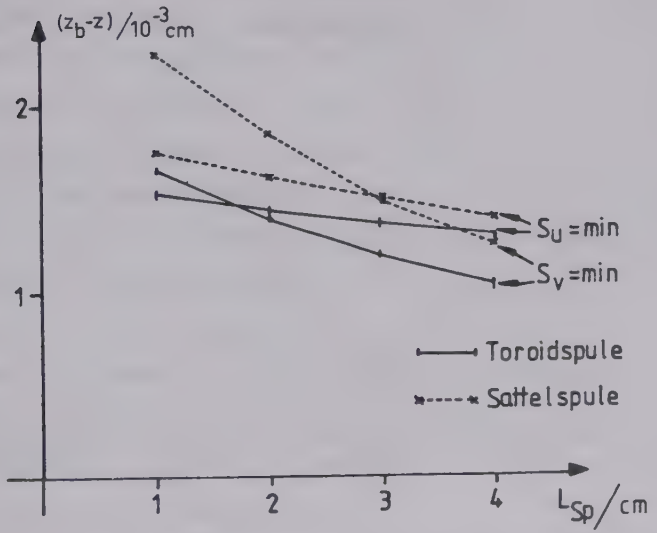

Fig.25: Abhängigkeit der Lage der Astigmatismuslinien von der Spulenlänge L_{Sp} bei einer Auslenkung von x_b=0.1cm in der Ebene z_b=10cm.

Fig.25 zeigt in Abhängigkeit von der Spulenlänge L_{Sp} die Defokussierungen z_u bzw. z_v, für die S_u bzw. S_v minimal werden. Die Spulenlänge, bei der die beiden Kurven einander schneiden, ist diejenige eines astigmatismusfreien Systems. Diese wird für die oben beschriebene Anordnung bei Sattelspulen ungefähr bei L_{Sp}=2.9cm und bei Toroidspulen ungefähr bei L_{Sp}=1.7cm erreicht. Die Bildfehlerscheibchen sind hier in den engsten Strahlquerschnitten besonders klein. Näherungsweise wird dieses schon durch S_3 und T_2 erreicht. Man sieht dies sehr deutlich in Fig. 24.

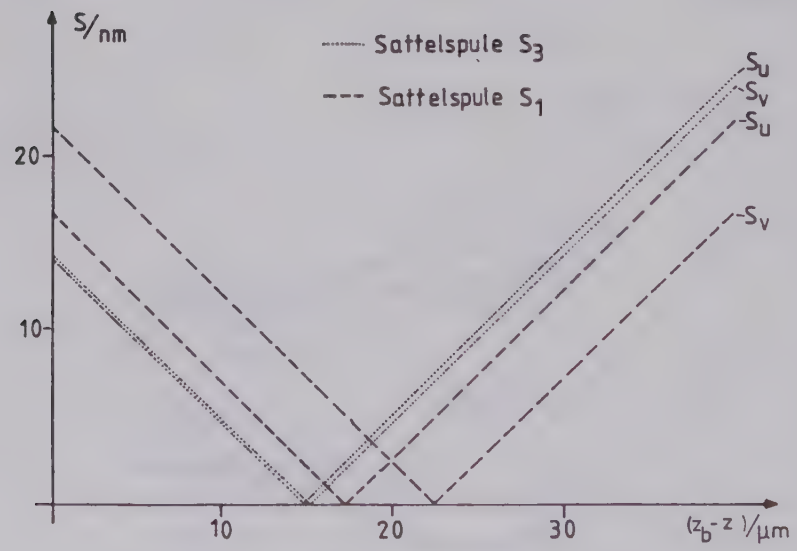

Fig.26: Verlauf von S_u und S_v in Abhängigkeit von z

Fig.26 zeigt den Verlauf von S_u und S_v der Spulen S_1 und S_3 in Abhängigkeit von z. Für S_3 ist die astigmatische Differenz z_u-z_v besonders klein; dagegen ist für S_1 die astigmatische Differenz erheblich. Für die hier angenommenen idea-

lisierten Anfangsbedingungen wird der engste Bündelquerschnitt sehr klein, und die Hyperbeln entarten praktisch zu Geraden. Sind dagegen die Anfangsbedingungen, etwa wegen des Öffnungsfehlers einer vorgeschalteten Linse, nicht die eines homozentrischen Bündels, so sind größere Werte der Querschnitte zu erwarten. Dies hätte aber keinen Einfluß auf die prinzipielle Diskussion dieses Beispiels.

5.2. Justierfehler

Wir betrachten jetzt Bündel, deren Zentralbahn infolge ungenauer Justierung der elektronenoptischen Bauelemente oder wegen einer vorangehenden Auslenkung des Bündels, etwa in Mehrfachablenksystemen, die Eintrittsebene nicht im Achsenpunkt senkrecht durchsetzt, sondern in einem andern Punkt und in anderer Richtung. Die hierbei zusätzlich auftretenden Fehler werden im folgenden als Justierfehler bezeichnet. Ein besonders einfacher Sonderfall ist eine Zentralbahn, die wie bisher die Eintrittsebene $z=z_s$ senkrecht durchsetzt, aber nicht im Achsenpunkt, sondern an der Stelle $x_s \neq 0$; $y_s=0$. Wenn wir wieder voraussetzen, daß das Ablenkfeld $\underline{B}(\underline{r})$ in der (x,z)-Ebene nur eine y-Komponente besitzt, so verläuft die Zentralbahn in dieser Ebene.

Die tatsächliche Auslenkung der Zentralbahn in der Registrierebene $z=z_b$ sei x_o. Durch die Anfangsbedingung $x_s \neq 0$ ist die Symmetrie bezüglich der x-Koordinate verletzt, und wir müssen im Gegensatz zum Ansatz (5.1) auch die geraden Potenzen von x_b bei der Entwicklung von x_o berücksichtigen. Mit $x_b=d \cdot I$ gilt:

$$x_o = x_s + d\ I + d_2\ I^2 + d_3\ I^3 + d_4\ I^4 + \cdots \qquad (5.7)$$

$$= x_s + x_b + D_2\ x_b^2 + D_3\ x_b^3 + D_4\ x_b^4 \cdots$$

In dem allgemeinen Fall, in dem auch $y_s \neq 0$ ist, wären beide Koordinaten x_o und y_o der Zentralbahn in der Registrierebene von x_b und y_b abhängig, und anstelle der Reihenentwicklung (5.7.) würde eine Entwicklung von $w_o(z_b)$ nach w_b und w_b^* treten wie auf Seite 58. Diesen allgemeinen Fall wollen wir hier aber nicht behandeln, sondern exemplarisch nur eine parallele Verschiebung des Zentralstrahls in x-Richtung. Hier ist wegen der Voraussetzung $B_x(x,0,z)=B_z(x,0,z)=0$ $y_o(z)=0$ und damit auch $y_o(z_b)=0$.

Die von x_s abhängigen Koeffizienten d_i und D_i können nun wieder durch Ausgleichsrechnung aus einer Anzahl von für verschiedene Werte von I und x_s numerisch berechneten Bahnen bestimmt werden. Für die in 5.1 behandelten Ablenksysteme ergibt sich, daß die Koeffizienten d und D_3 praktisch nicht von x_s abhängen. D_2 hängt näherungsweise linear von x_s ab:

$$D_2 = C_2\ x_s. \qquad (5.8)$$

Aus den vorausgestetzten Symmetrieeigenschaften folgt $x_o(z_b,x_s,I)=-x_o(z_b,-x_s,-I)$; folgt weiter, daß die Koeffizienten $d_k(x_s)$ und $D_k(x_s)$ ungerade Funktionen von x_s sind, wenn k gerade ist und umgekehrt. Für kleine x_s folgt daraus, daß die d_k und D_k für k=1 und 3 näherungsweise konstant sind und D_2 näherungsweise zu x_s proportional ist. Dieser Zusammenhang wird im Anhang 4 näher diskutiert.

Für das in 5.1 zum Vergleich eingeführte abgehackte homogene Feld erhält man $D_2 = D_4 = D_6 = \ldots = 0$ und unabhängige D_3, D_5, D_7, ... Bezeichnet man also die Abweichung des tatsächlichen Feldes vom abgehackten homogenen als Streufeld, so ist dieses die Ursache der Verzeichnung 2. Ordnung. Es ist plausibel, daß D_2 und damit C_2 bei länger werdenden Spulen kleiner werden, weil hier die relative Abweichung des tatsächlichen Feldes von abgehackten homogenen geringer wird. Bei Sattelspulen ist die Verzeichnung 2. Ordnung merklich größer als bei Toroidspulen. Die folgende Tabelle zeigt die Abhängigkeit des Koeffizienten C_2 von der Spulenlänge. Der hochgestellte Index T bzw. S bei C_2 bezieht sich auf Toroidspulen bzw. Sattelspulen.

L_{Sp}/cm	$-C_2^T/(10^{-2}cm^{-2})$	$-C_2^S/(10^{-2}cm^{-2})$
1	0.31	0.51
2	0.23	0.37
3	0.16	0.26
4	0.11	0.18

Fig.27 zeigt die Abhängigkeit des Koeffizienten C_2 von der Lage der Bildebene für die Spulen T_2, S_2. Man sieht deutlich, daß sich C_2 außerhalb des Feldbereichs nur schwach ändert.

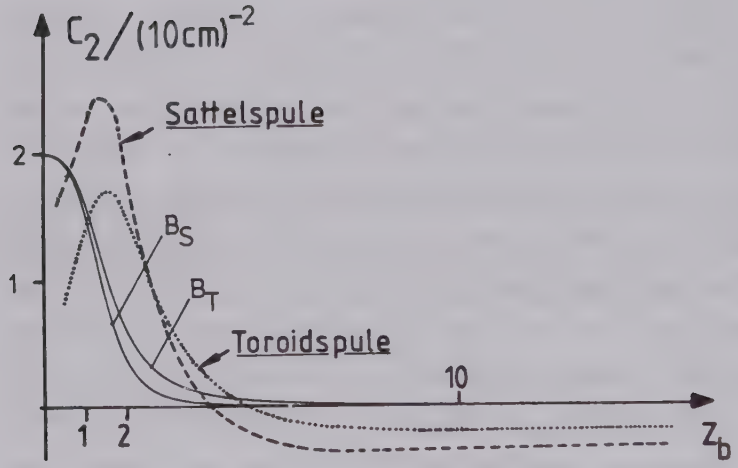

Fig.27: Der Koeffizient $C_2=D_2/x_s$ in Abhängigkeit von der Lage z_b der Bildebene. Die mit B_T und B_S gekennzeichneten Kurven geben den axialen Feldverlauf der Spulen T_2 bzw. S_2 in willkürlichen Einheiten wieder.

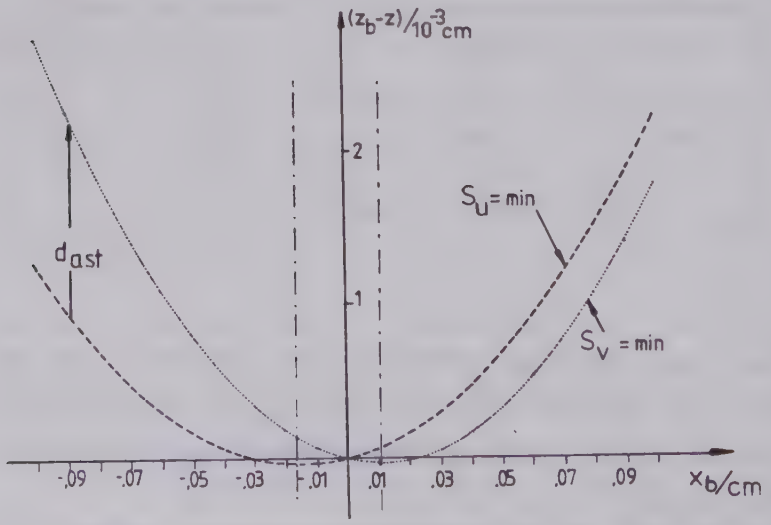

Fig.28: Axiale Defokussierungsstrecken bei der die engsten Bündelquerschnitte vorliegen bei der um X_s=0.1cm dejustierten Sattelspule S_1 in Abhängigkeit von der Auslenkung.

Wir wollen jetzt untersuchen, wie sich Defjustierungen auf den Verlauf der engsten Bündelquerschnitte in Abhängigkeit von der Auslenkung x_o auswirken. Die Anfangsbedingungen der Bahnen wählen wir wieder auf ähnliche Weise wie auf S.72, d.h. wir betrachten ein monoenergetisches homozentrisches Bündel, dessen Anfangstangenten alle durch den Punkt $x=x_s$; $y=0$ in der Registrierebene $z=z_b$ gehen. Dazu machen wir für z_u und z_v folgenden Potenzreihenansatz:

$$z_u(x_b,x_s) = z_b + a_{u1}(x_s)\, x_b + a_{u2}(x_s)\, x_b^2 + \cdots$$
$$z_v(x_b,x_s) = z_b + a_{v1}(x_s)\, x_b + a_{v2}(x_s)\, x_b^2 + \cdots \qquad (5.9)$$

Wegen der Symmetrieeigenschaften $z_u(x_b,x_s)=z_u(-x_b,-x_s)$ und $z_v(x_b,x_s)=z_v(-x_b,-x_s)$ sind die Koeffizienten $a_{uk}(x_s)$ und $a_{vk}(x_s)$ gerade Funktionen von x_s, wenn k gerade ist und ungerade Funktionen von x_s, wenn k ungerade ist. Betrachten wir ein zunächst exakt justiertes Ablenksystem ($x_s=0$): Aus Symmetriegründen verschwinden die Koeffizienten der ungeraden Potenzen von x_b. Der Verlauf von z_u und z_v wird damit in erster Näherung durch zwei Parabeln beschrieben, deren Scheitel bei $x_b=0$ liegen. Wenn wir jetzt eine Dejustierung des Ablenksystems zulassen ($x_s\neq 0$), so ist damit die Symmetrie zerstört. In der Entwicklung (5.9) müssen nun auch die ungeraden Potenzen von x_b berücksichtigt werden. In Fig.28 werden z_u und z_v in Abhängigkeit von der Auslenkung x_b für die Satttelspule S_1 dargestellt. Die Bildebene liegt bei z_b=10cm, und x_s=0.1cm. Die dargestellten Kurven sind in erster Näherung wieder Parabeln. Die Bestimmung der Koeffizienten durch Ausgleichsrechnung hat ergeben, daß a_{u2} und a_{v2} praktisch unabhängig von x_s sind. Ferner sind a_{u1} und

a_{v1} und damit der Abstand der Minima der Parabeln in guter Näherung proportional zu x_s. Auch hier zeigt es sich wieder, daß durch eine Dejustierung x_s weitere zu x_s proportionale Fehlerterme auftreten. Die astigmatische Verschiebung d_{ast} berechnet sich zu:

$$d_{ast} = (a_{u1}-a_{v1})\, x_b + (a_{u2}-a_{v2})\, x_b^2 \qquad (5.10)$$

Da der Koeffizient $(a_{u1}-a_{v1})$ nur für $x_s=0$ verschwindet, tritt hier neben dem zu x_b^2 proportionalen Term auch ein in x_b linearer Term auf. Dieser ergibt sich mit der im Kapitel 4 beschriebenen und hier angewandten Bildfehlerbeschreibung ohne zusätzliche Annahmen. Damit haben wir wieder ein Beispiel, das die Vorteile der einfachen Fehlerdarstellung zeigt, denn die Erfassung aller Fehlerterme über Bildfehlerintegrale wäre schon in diesem einfachen Fall wesentlich aufwendiger gewesen.

Zum Schluß dieses Abschnitts bringen wir noch ein Beispiel für den Fall, daß die Zentralbahn des Bündels das Ablenksystem der Sattelspule S_1 schräg durchläuft. Die Zentralbahn geht in der Ebene z_s=-10cm vom Punkt $x_s=y_s$=0.1cm mit einer Anfangstangente aus, die durch den Punkt z_b=10cm; $x_b=y_b$=0cm geht. Die Zentralbahn sei wieder monenergetisch und homozentrisch, d.h. seine Anfangstangenten bilden einen Hohlkegel mit dem Öffnungswinkel $2\alpha = 10^{-3}$rad, dessen Spitze im Punkt z_b=10cm; $x_b=y_b$=0cm liegt. Fig. 29 zeigt die Bildfehlerscheibchen für verschiedene Auslenkungen in der Registrierebene $z=z_b$. Fig.29a zeigt die Bildfehlerscheibchen für die Auslenkungen $x_b=-10^{-2}$cm bis $-4\cdot10^{-2}$cm im Abstand von 10^{-2}cm

übereinander eingezeichnet, Fig.29b die Bildfehlerscheibchen für $x_b=10^{-2}$cm bis $4\cdot10^{-2}$cm. Fig.30 zeigt den zu diesem Beispiel gehörenden Verlauf von S_u und S_v. S_u und S_v lassen sich für kleine x_b gut durch Polynome 2. Grades in x_b beschreiben. Wie im vorhergehenden Beispiel, lassen sich z_u und z_v durch den Ansatz (5.9) beschreiben. Falls eine Dejustierung vorliegt, treten in der Entwicklung auch ungerade Potenzen von x_b mit auf, deren Koeffizienten von den Dejustierparametern abhängen. Die Defokussierungen z_u-z_b und z_v-z_b bezüglich der Ebene $z=z_b$ haben zwei Nullstellen und zwar bei z_u-z_b bei $x_b=0$ und bei $x_b=-a_{u1}/a_{u2}$. An diesen Stellen wird S_u minimal. Ensprechendes gilt für S_v. Dies ist in Fig.30 für S_v gut erkennbar. Dagegen ist a_{u1} so klein, daß die Nullstellen und das dazwischenliegende Maximum von S_u nicht mehr getrennt sichtbar dargestellt werden können.

Die Beispiele in diesem Abschnitt zeigen, wie einfach mit der neuen Bildfehlerbeschreibung der Einfluß von Dejustierungen auf die Aberrationen bestimmbar ist. Damit kann jetzt der Einfluß von angenommenen Dejustierparametern auf die elektronenoptischen oder auch optischen Eigenschaften untersucht werden. Aus solchen Modellrechnungen kann man dann schließlich Anhaltspunkte für die technische Realisierung solcher Anordnungen finden. Da in der Praxis eine große Anzahl von möglichen Dejustierparametern vorliegt, übersteigt eine systematische Untersuchung dieser Effekte den Rahmen dieser Arbeit.

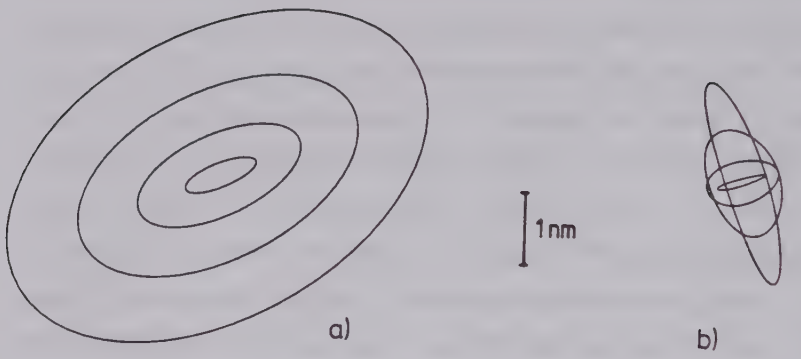

Fig.29: Bildfehlerscheibchen bei schrägem Strahldurchlauf.
a) negative Auslenkung b) positive Auslenkung.

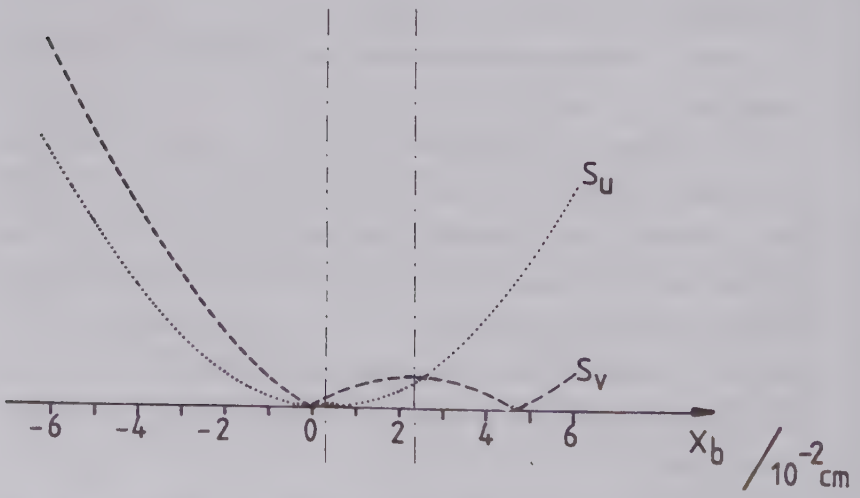

Fig.30: Beispiel für den Verlauf von S_u und S_v bei schrägem Strahlverlauf durch die Ablenkspule S_1.

5.3 Einfluß der Induktivität auf den Spulenstrom

Die Induktivität eines magnetischen Ablenksystems beeinflußt beim Anlegen einer zeitabhängigen Spannung U(t) den den Spulenstrom I(t) und somit den zeitlichen Feldverlauf. Hat die Ablenkspule die Induktivität L und den Widerstand R, dann gilt:

$$U(t) = R\, I(t) + L\, \dot{I}(t) . \tag{5.11}$$

Legt man nun an die Spule eine Spannung U(t) an, so lautet die Lösung der Dgl. für die Anfangsbedingung $I(0):=i_o$ bekanntlich:

$$I(t) = i_o\, e^{-(R/L)t} + \frac{1}{L}\, e^{-(R/L)t}\, g(t) . \tag{5.12}$$

Mit $g(t) := \int_0^t U(t')\, e^{(R/L)t'}\, dt'$.

Oft ist die Funktion U(t) periodisch, wie etwa bei Rasterelektronenmikroskopen, d.h. U(t+nT)=U(t). Dann existiert eine periodische Lösung I(t) mit derselben Periode T:

$$I(t) = \frac{1}{L}\, e^{-(R/L)t}\, \left[g(t) + g(T)\, e^{-(R/L)T}/(1-e^{-(R/L)T})\right] .$$

Fig.31 zeigt I(t) bei einer angelegten Sägezahnspannung U(t) für verschiedene Werte von $\gamma = L/(RT)$. I(t) ist in guter Näherung ebenfalls eine Sägezahnfunktion, wenn $\gamma < 0.005$, d.h.

$$f = 1/T < 5 \cdot 10^{-3}\ R / L \tag{5.13}$$

einhält. Diese Beziehung wurde durch Messungen von Herrn Dipl. Phys. H. Hirsch an einer Sattelspule bestätigt. Für eine typische Ablenkspule mit $R=10\,\Omega$, $L=10^{-3}$Hy ergibt sich damit eine Grenzfrequenz von 50 Hz, welche etwa der Rasterfrequenz des schnelleren Sägezahnsignals in üblichen Rastermikroskopen entspricht. Will man etwa in Mikroschreibern höhere Frequenzen erreichen, so ist man gezwungen, stromstabilisierte Stromversorgungen zu benutzen.

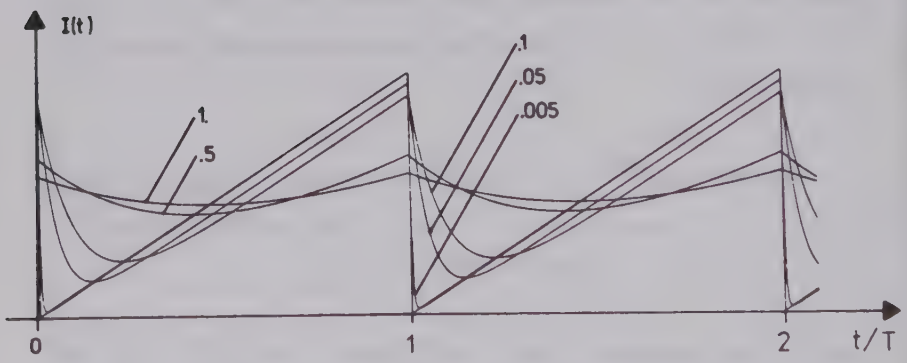

Fig.31 : Zeitlicher Stromverlauf bei periodisch angelegter Sägezahnspannung für unterschiedliche Werte von γ.

Im folgenden wollen wir mit den aus der Integralgleichung gewonnenen Größen die Feldenergie W_{Feld} und daraus die Induktivität L bestimmen. Wenn durch ein Spulenpaar der Strom i_o fließt, gilt für die Feldenergie: $W_{Feld} = \frac{1}{2} L\, i_o^2$. Diese errechnet sich für eine Anordnung nach Fig.1 bekanntlich aus:

$$W_{Feld} = \frac{1}{2} \left(\iiint_{G_1} \underline{B}\cdot\underline{H}\, d^3r + \iiint_{G_2} \underline{B}\cdot\underline{H}\, d^3r \right). \qquad (5.14)$$

Es gilt: $\underline{H} = \underline{H}_o + \text{grad } V$. Mit

$$\underline{a}_o(r) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\, d^3r'$$

gilt: $\underline{H}_o = \text{rot } \underline{a}_o$. $\mu_1 \underline{a}_o$ ist das Vektorpotential, aus dem durch Rotation die Flußdichte $\underline{B}_o = \mu_1 \text{rot } \underline{a}_o = \mu_1 \underline{H}_o$ folgt. Wir führen jetzt die Integration in (5.14) über G_1 durch:

$$\iiint_{G_1} \underline{B}\cdot\underline{H}\, d^3r = \mu_1 \iiint_{G_1} (\underline{H}_o + \text{grad } V)^2\, d^3r$$

$$= \mu_1 \iiint_{G_1} \left[\underline{H}_o \text{ rot } \underline{a}_o + 2\, \underline{H}_o \text{ grad } V + (\text{grad } V)^2 \right] d^3r .$$

Die einzelnen Terme lassen sich nach bekannten Formeln der Vektoranalysis umformen:

$$\iiint_{G_1} (\underline{H}_o \text{ rot } \underline{a}_o)\, d^3r = \iiint_{G_1} \left[\text{div}(\underline{a}_o \times \underline{H}_o) + \underline{a}_o \text{ rot } \underline{H}_o \right] d^3r$$

$$= \oiint_{\partial G} \underline{a}_o \times \underline{H}_o\, (-\underline{n})\, df + \iiint \underline{j}\, \underline{a}_o\, d^3r \quad ,$$

dabei wurde rot $\underline{H}_o = \underline{j}(\underline{r})$ verwendet. Der zweite Term ergibt:

$$\iiint_{G_1} \underline{H}_o \text{ grad } V\, d^3r = \iiint_{G_1} \left[\text{div}(V\, \underline{H}_o) - V \text{ div } \underline{H}_o \right] d^3r$$

$$= \oiint_{\partial G} V\, \underline{H}_o\, (-\underline{n})\, df \quad ,$$

hierbei wurde div $\underline{H}_o = 0$ verwendet. Mit $\nabla^2 V = 0$ gilt:

$$\iiint_{G_1} (\text{grad } V)^2 \, d^3r = \iiint_{G_1} [\text{div}(V \text{ grad } V) - V \nabla^2 V] \, d^3r$$

$$= - \oiint_{\partial G} V \frac{\partial V}{\partial n}\Big|_1 \, df \, .$$

Die Integrale für G_2 haben eine entsprechende Form, nur ist hier $(-\underline{n})$ durch $\underline{n}$ und $\frac{\partial}{\partial n}\big|_1$ durch $-\frac{\partial}{\partial n}\big|_2$ zu ersetzen. Faßt man alle Terme zusammen, so ergibt sich folgender Ausdruck:

$$W_{Feld} = \frac{\mu}{2} \iiint \underline{a}_o \, \underline{j} \, d^3r \qquad (5.15)$$

$$+ \frac{\mu_2 - \mu_1}{2} \oiint_{\partial G} (\underline{a}_o \times \underline{H}_o + 2 V \underline{H}_o) \, \underline{n} \, df$$

$$+ \frac{1}{2} \oiint_{\partial G} V \left(\mu_2 \frac{\partial V}{\partial n}\Big|_2 - \mu_1 \frac{\partial V}{\partial n}\Big|_1\right) df \, .$$

Mit Berücksichtigung von (2.4) ergibt sich daraus:

$$W_{Feld} =: W_o + W_e \qquad (5.16)$$

$$= \frac{\mu}{2} \iiint \underline{a}_o \cdot \underline{j} \, d^3r + \frac{\mu_2 - \mu_1}{2} \oiint_{\partial G} (\underline{a}_o \times \underline{H}_o + V \underline{H}_o) \, \underline{n} \, df \, .$$

Der erste Energieterm W_o ist die Feldenergie der Spule bei Abwesenheit aller sonstigen Materialien; der zweite Energieterm W_e ist die Energie, die benötigt wird, um das zweite Medium ins H_o-Feld zu bringen. Ist das zweite Medium diamagnetisch, d.h $\mu_2 < \mu_1$, dann ist der zweite Energieterm negativ, da dann ja die Gesamtenergie erniedrigt wird. Zur Berechnung der Feldenergie muß man also lediglich über die Stromverteilung integrieren und ein Oberflächenintegral auswerten.

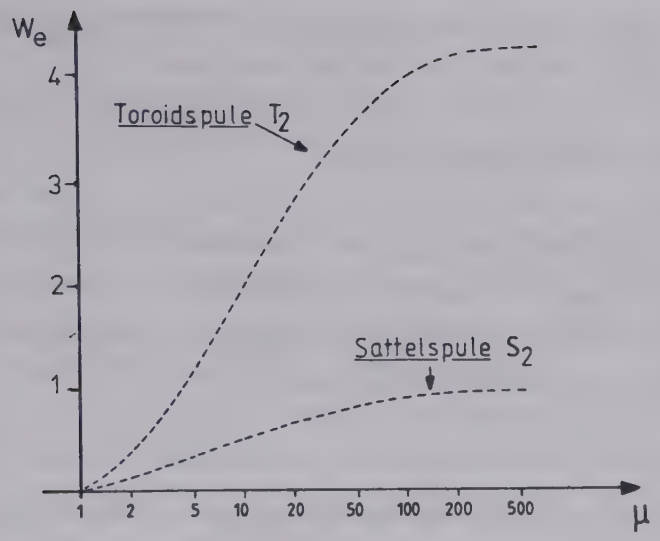

Fig.32: Verlauf der magnetischen Feldenergie in Abhängigkeit von der relativen Permeabilität μ in willkürlichen Einheiten.

Bei der Berechnung des zweiten Energieterms muß man für $(\mu_2 - \mu_1) \rightarrow \infty$ sehr sorgfältig sein. Hier geht der Wert des Integrals gegen Null und die Energie ergibt sich aus dem Grenzwert des Produktes einer unendlich wachsenden Zahl und einer gegen Null gehenden Zahl. Für $(\mu_2 - \mu_1) > 10^3$ wird die Berechnung des zweiten Energieterms ungenau, da man hier mit der Genauigkeitschranke der Berechnung von V in Schwierigkeiten gerät. Da aber in unseren Beispielen für $\mu > 500$ das H-Feld schon praktisch völlig aus dem zweiten Medium verdrängt worden ist, liegt eine Sättigung der Energie vor, sodaß eine Rechnung für größere Werte von μ nicht erforderlich ist. Den maximalen Wert der Energie hat man ja dann er-

reicht, wenn das H-Feld völlig aus dem zweiten Medium verdrängt worden ist. Fig.32 zeigt eine Gegenüberstellung des schematischen Verlaufs des zweiten Energieterms W_e der Toroidspule T_2 und der Sattelspule S_2 in Abhängigkeit von der relativen Permeabilität $\mu = \mu_2/\mu_1$.

Im Kapitel 3 wurde das H_o-Feld durch Integration über eine Winkelstromdichte $j(\varphi)=i_o w_o f(\varphi)$ berechnet. Im einfachsten Fall gilt dabei $f(\varphi)=\cos\varphi$ bzw. $f(\varphi)=\sin\varphi$. Da der Strom i_o und die Wicklungsdichte w_o als konstante Werte aus den Integralen herausgezogen werden können, gilt:

$$\underline{H}_o(\underline{r}) = i_o w_o \, \underline{H}_{norm}(\underline{r}) \qquad (5.17)$$

$\underline{H}_{norm}(\underline{r})$ ist dabei das auf den Strom $i_o=1$ und die Wicklungsdichte $w_o=1$ normierte H_o-Feld. Für $\underline{a}_o(\underline{r})$ gilt die entsprechende Beziehung. Da die Integralgleichung (2.11) in allen Feldgrößen linear ist folgt daraus, daß auch das Potential V analog zu (5.17) dargestellt werden kann. Damit gilt für die Feldenergie:

$$W_{Feld} = W_{norm} \, w_o^2 \, i_o^2 = \frac{1}{2} L \, i_o^2 \qquad (5.18)$$

Zur Berechnung des Beitrags der Stromwindungen zur Feldenergie, muß man eine endliche Drahtdicke berücksichtigen, da man sonst durch die Bügel bei Sattelspulen einen singulären Ausdruck für die Energie erhält. Als Beispiel haben wir die Induktivität der Spulen S_2 und T_2 bei cos-förmiger Wicklungsdichte bestimmt. Bei einem angenommenen Drahtdurchmesser des Bügels von 0.3cm und einer Höhe der Wicklungsschicht der meridionalen Wicklung von 0.1cm erhielten wir folgende Werte:

$L_o = 40\ nHy\ w_o^2$ $L_e = 70\ nHy\ w_o^2$ für Sattelspulen,

$L_o = 20\ nHy\ w_o^2$ $L_e = 140\ nHy\ w_o^2$ für Toroidspulen,

wobei jeweils L_o die Induktivität der Spule ohne Kern und L_e jeweils die Induktivität der Spule mit einem hochpermeablen Kern ist.

Weitere Induktivitätsberechnungen von Toroid- und Sattelspulen, bei sonst gleichen Daten, lassen folgenden Schluß zu: Bei Spulen, welche auf ein hochpermeables Material gewickelt sind, ist die Induktivität von Toroidspulen näherungsweise doppelt so groß wie die von Sattelspulen. Der hochpermeable Kern erhöht die Induktivität der Spule ohne Kern bei Sattelspulen je nach Lage des Bügels um einen Faktor 1.5 bis 2, bei Toroidspulen um ungefähr einen Faktor 7. Die große Zunahme der Induktivität bei Toroidspulen beruht auf der starken Feldverdrängung durch den Kern.

Aus (5.18) folgt, daß die Induktivität proportional zu w_o^2 ist. Da der Widerstand proportional zur Länge des Leiters ist und diese wiederum proportional zu w_o ist, gilt $R \sim w_o$. Damit gilt $R/L \sim 1/w_o$. Nach Gl. (5.13) kann man deshalb ein Spulenpaar mit höheren Frequenzen betreiben, wenn man eine geringe Wicklungdichte wählt und dafür die Spule mit einem höheren Strom betreibt. Da die Induktivität von Toroidspulen im Vergleich zu Sattelspulen bei sonst gleichen geometrischen Daten ungefähr doppelt so groß ist, ist es günstiger, im zeitabhängigen Betrieb Sattelspulen zu verwenden, obwohl Toroidspulen im statischen Gebrauch geringere Bildfehler verursachen.

6. Zusammenfassung

Die Problemstellung dieser Arbeit war die Berechnung von magnetischen Feldern bei gegebener Verteilung der felderzeugenden Ströme und der gebietsweise konstanten Permeabilität. Zur Feldberechnung wurde das magnetische Feld in einen Wirbelanteil und einen durch ein Potential beschriebenen Quellanteil zerlegt. Der Wirbelanteil folgt nach dem Biot-Savartschen Gesetz aus der Stromverteilung. Für den Quellanteil wurde eine Fredholmsche Integralgleichung 2. Art hergeleitet, deren Lösung das Potential auf den Grenzflächen der Gebiete konstanter Permeabilität liefert. Um das Potential im ganzen Raum zu beschreiben, wurde das erweiterte Kreisringverfahren (Kasper, Scherle 1982) verwandt, wobei für rotationssymmetrische Bauteile das Potential in eine Fourierreihe bezüglich des Azimutwinkels entwickelt wurde. Die Kombination beider Verfahren ermöglicht die Berechnung der elektronenoptischen Eigenschaften von Anordnungen, insbesondere Ablenksystemen, für die bisher voll befriedigende Berechnungsverfahren fehlten.

Zur Berechnung der einzelnen Fourierkomponenten des Potentials auf den rotationssymmetrischen Grenzflächen wurde durch einen Ansatz mit Splinefunktionen eine sehr effiziente numerische Lösungsmethode entwickelt. Anschließend wurde die Integralgleichungsmethode auf den Fall von mehr als zwei Gebieten konstanter Permeabilität verallgemeinert. Die Lösung erfolgt durch eine in der Regel schnell konvergierende Iteration. Die Methode läßt sich bis zu einer Anzahl von etwa fünf Bauteilen gut anwenden. Wenn wesentlich mehr Bauteile oder Materialien vorliegen, wird der Programmieraufwand sehr

groß und die Anwendung der Methode der finiten Elemente kann vorteilhafter werden.

Weiter wurde in Hinblick auf die Lösung von Optimierungsproblemen eine einfache Beschreibung von Bildfehlern entwikkelt. Dabei wurden Größen und Begriffe aus der Statistik verwendet. Mit diesem Verfahren erhält man die Extremalausdehnungen von Bildfehlerscheibchen. Auch andere Größen, welche üblicherweise aus Bildfehlerintegralen berechnet werden, sind mit diesem Verfahren ermittelbar. Besondere Vorteile der neuen Methode bestehen jedoch darin, daß die Bildfehlerscheibchen als Ganzes beschrieben werden, ferner darin, daß sich die Abhängigkeit der Abmessungen der Fehlerscheibchen von der Defokussierung leicht untersuchen läßt. Man kann dadurch für die jeweilige Anordnung eine optimale Bildebene ermitteln.

Als Beispiel für die Anwendung der Feldberechnungsmethode und der Bildfehlerbeschreibung wurden Anordnungen mit Ablenkspulen berechnet. Dabei wurde unter anderem gezeigt, wie einfach mit der neuen Bildfehlerbeschreibung ein dejustiertes System behandelt werden kann. Dagegen wäre eine Berechnung mit Bildfehlerintegralen sehr viel aufwendiger gewesen.

Danksagung

Zum Schluß dieser Arbeit möchte ich Herrn Prof. Dr. Kasper recht herzlich dafür danken, daß er mir diese Arbeit ermöglicht hat. Wir haben sehr viele fruchtbare Diskussionen geführt, und ich habe viele wertvolle Hinweise und Anregungen von ihn erhalten.
Mein Dank gilt weiter Herrn Prof. Dr. Lenz für die kritische Durchsicht der vorliegenden Arbeit sowie allen Mitgliedern des Lehrstuhls für theoretische Elektronenoptik, denen ich für hilfreiche Diskussionen danke.

Besonders möchte ich auch der Studienstifung des deutschen Volkes danken, die mich während meines ganzen Studiums gefördert hat.

Dem Zentrum für Datenverarbeitung der Universität Tübingen danke ich für die Bereitstellung von Rechenkapazität und der Deutschen Forschungsgemeinschaft danke ich für die Unterstützung mit Sachmitteln.

Literatur

[1] Abramowitz H. und I.A., Stegun (1973), Handbook of Mathematical Functions, Dover Publ., New York

[2] Carpenter M. E. (1977), IEEE Transact. on Consum. Electr., 22

[3] Compumag-Tagungsband (1976)

[4] Fye D.M. (1979), J. Appl. Phys. 50, 17

[5] Goto E. und Soma T. (1977), Optik 48, 255

[6] Gradshteyn I.S. und Ryzhik I.M. (1980), Table of Integrals, Series and Products, Academic Press, New York

[7] Hawkes P.W. (1982), Properties of Magnetic Electron Lenses. Springer-Verlag Berlin-Heidelberg

[8] Iselin C. F. (1981), IEEE Transact. on Magnetics, 17, 2168

[9] Jaswon M.A. und Symm G.T. (1977), Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics, Academic Press, New York

[10] Kasper E. und Schwertfeger W. (1974), Optik 41, 160

[11] Kasper E. (1979) Theoretische Elektronenoptik, Vorlesung an der Universität Tübingen

[12] Kasper E. (1980), Numerische Berechnung elektromagnetischer Felder, Vorlesung an der Universität Tübingen

[13] Kasper E. und Scherle W. (1982), Optik 60, 339

[14] Kasper E. (1983), Optik 64, 157

[15] Kilger G. (1980), Dissertation, Univ. Tübingen

[16] Lucas I. (1976), J. Appl. Phys. 47, 1645

[17] Morse P.M. und Feshbach H., (1957), Methods of Theoretical Physics Vol.I,II, Mc Graw-Hill, New York

[18] Munro E. (1974), Optik 39, 450

[19] Munro E. und Chu H.-Ch. (1982), Optik 60, 371
Optik 61, 1-16, 121-145, 213-236

[20] Plies E. (1982), Siemens Forsch.- und Entwickl.-Ber. Bd.11

[21] Plies E. und Rose H. (1971), Optik 34, 171

[22] Ritz E. (1979), Advances in Electronics and Electron Physics, Vol. 49, 299

[23] Schaefer C. (1982), Dissertation, Univ. Tübingen

[24] Scherle W. (1981), Diplomarbeit

[25] Scherle W. (1983), Optik 63, 217

Anhang 1

Zu zeigen ist folgender Grenzübergang:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \quad \varepsilon \oiint_{\partial G} \frac{\underline{n}\,\underline{n}'\, f(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}' \pm \varepsilon\, \underline{n}|^3} \, df' = 2\pi\, f(\underline{r})$$

wobei $f(\underline{r})$ eine sich gutartig verhaltende Funktion sein soll. Zunächst zerlegen wir ∂G so in zwei Oberflächengebiete ∂G_1 und ∂G_2, daß ∂G_1 durch einen Kreis mit dem sehr kleinen Radius R in der Tangentialebene um $\underline{r}$ approximierbar ist. Wir wählen R so klein, daß man $f(\underline{r}')=f(\underline{r})$ für alle $\underline{r}'$ auf ∂G_1 setzen kann. Wir erhalten dann

$$F(\underline{r}) := \lim_{\varepsilon \to 0} \quad \varepsilon \left\{ \iint_{\partial G_1} \frac{\underline{n}\,\underline{n}'\, f(\underline{r})}{|\underline{r}-\underline{r}' \pm \varepsilon\, \underline{n}|^3} \, df' \right.$$

$$\left. + \iint_{\partial G_2} \frac{\underline{n}\,\underline{n}'\, f(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}' \pm \varepsilon\, \underline{n}|^3} \, df' \right\}.$$

Da R ein fester Wert ist, bleibt das Integral über ∂G_2 endlich und trägt im Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ nichts mehr zu $F(\underline{r})$ bei. Es genügt also den ersten Term auszuwerten. Aus diesem wird mit der Substitution $|\underline{r}-\underline{r}'| = \varepsilon\, u$:

$$F(\underline{r}) = f(\underline{r}) \lim_{\varepsilon \to 0} \quad \varepsilon \int_0^{2\pi} \int_0^{R/\varepsilon} \frac{\varepsilon^2\, u}{(\varepsilon^2 u^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} \, du\, d\varphi'$$

$$= 2\pi\, f(\underline{r})$$

was zu zeigen war.

Anhang 2

Die Integrale I_j wurden folgendermaßen definiert:

$$I_j = \int_0^{2\pi} \frac{(\cos\alpha)^j}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}\, d\alpha \ .$$

Da der Integrand bezüglich α spiegelsymmetrisch ist, gilt unter Beachtung von (2.20), (2.21) und der Definition $x := \alpha/2$ für I_j:

$$I_j = 4\, a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2\cos^2 x - 1)^j\, dx}{(1 - k^2\cos^2 x)^{3/2}} \ .$$

Unter Berücksichtigung von $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ reicht es, zur Berechnung von I_j Integrale der Form:

$$K_i := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^{2i}}{(1 - k^2\cos^2 x)^{3/2}}\, dx$$

auszuwerten. Es gilt dann für die Integrale I_j:

$$I_o = 4\, a^3 \quad K_o$$

$$I_1 = 4\, a^3 \quad (2\, K_1 - K_o)$$

$$I_2 = 4\, a^3 \quad (4\, K_2 - 4\, K_1 + K_o) \ .$$

Zunächst wollen wir K_o berechnen. Dazu differenzieren wir die Funktion $\frac{k^2}{(1-k^2)} \cdot \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{(1-k^2\cos^2 x)}}$ nach x.

Nach Zusammenfassen der einzelnen Terme gilt:

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{k^2}{(1-k^2)}\ \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{(1-k^2\cos^2 x)}}\right\}$$

$$= \frac{1}{(1-k^2\cos^2 x)^{3/2}} - \frac{1}{(1-k^2)}\sqrt{(1-k^2\cos^2 x)}\ .$$

Integriert man beide Seiten über x zwischen den Grenzen 0 und $\pi/2$, so ergibt sich wegen $\sin(0) = 0$ und $\cos(\pi/2) = 0$:

$$0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(1-k^2\cos^2 x)^{3/2}} - \frac{1}{(1-k^2)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(1-k^2\cos^2 x)}\ dx\ .$$

Daraus folgt aber $K_o = E(k)/(1-k^2)$. Für K_1 gilt:

$$K_1 = \frac{-1}{k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-k^2\cos^2 x)-1}{(1-k^2\cos^2 x)^{3/2}}\ dx$$

$$= \frac{1}{k^2}\,(K_o - K(k))\ .$$

Durch Ergänzen von $\cos^4 x$ zu:

$$\cos^4 x = ((1-k^2\cos^2 x)^2 - 2(1-k^2\cos^2 x) + 1)/k^4$$

erhält man für K_2 wie oben nach elementarer Rechnung:

$$K_2 = (\ K_o + E(k) - 2K(k)\ )/k^4\ .$$

Zusammenfassen der Terme ergibt die in (2.27) angegebenen Ausdrücke.

Anhang 3

In diesem Anhang soll gezeigt werden, wie man die Integrale, welche Winkelfunktionen mit den Argumenten φ, φ' und $\alpha := \varphi - \varphi'$ enthalten, berechnen kann. Der Trick zur Lösung der Integrale besteht darin, daß man den Winkel φ' zu $(\varphi'-\varphi)+\varphi = \varphi - \alpha$ ergänzt und die Symmetrieeigenschaften der Winkelfunktionen ausnutzt. Mit $\varphi' = \varphi - \alpha$ gilt unter Beachtung der Additionstheoreme:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi'}{D^3(\cos\alpha)}\, d\varphi' = \cos\varphi \int_0^{2\pi} \frac{\cos\alpha}{D^3}\, d\varphi' + \sin\varphi \int_0^{2\pi} \frac{\sin\alpha}{D^3}\, d\varphi' .$$

Aus Symmetriegründen gilt: $\int_0^{2\pi} \frac{\sin\alpha}{D^3(\cos\alpha)}\, d\alpha = 0$

Da das Integrationsintervall bei der vorliegenden Integration beliebig verschoben werden kann, ohne daß der Wert des Integrals sich ändert, folgt daraus:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi'}{D^3(\cos\alpha)}\, d\varphi' = \cos\varphi \int_0^{2\pi} \frac{\cos\alpha}{D^3(\cos\alpha)}\, d\alpha = \cos\varphi\, I_1 ,$$

wobei die Berechnung der Integrale I_j im Anhang 2 beschrieben ist. Analog erhält man:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi'}{D^3}\, d\varphi' = \sin\varphi\, I_1$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi'\cos\alpha}{D^3}\, d\varphi' = \cos\varphi\, I_2$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi'\cos\alpha}{D^3}\, d\varphi' = \sin\varphi\, I_2$$

Ferner gilt mit $\sin^2\alpha = (1 - \cos^2\alpha)$:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi' \sin\alpha}{D^3}\, d\varphi' = \sin\varphi\,(I_0 - I_2) \ .$$

Weitere Integrale, die noch in der Arbeit auftreten, enthalten $\cos^2\varphi'$ und $\sin\varphi'\cos\varphi'$ im Zähler.
Es gilt $\cos^2\varphi' = (\cos\varphi\cos\alpha + \sin\varphi\sin\alpha)^2$. Da die Mischglieder bei der nachfolgenden Integration keinen Beitrag ergeben gilt mit
$\cos^2\varphi\cos^2\alpha + \sin^2\varphi\sin^2\alpha = \cos^2\varphi\,(2\cdot\cos^2\alpha - 1) + 1 - \cos^2\alpha$:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi'}{D^3}\, d\varphi' = \cos^2\varphi\,(2I_2 - I_0) + I_0 - I_2 \ .$$

Mit $\sin\varphi'\cos\varphi' = \sin\varphi\cos\varphi\,(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + (\sin^2\varphi - \cos^2\varphi)\sin\alpha\cos\alpha$ folgt:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi'\cos\varphi'}{D^3}\, d\varphi' = \sin\varphi\cos\varphi\,(2I_2 - I_0) \ .$$

Mit $\sin^2\varphi' = (1 - \cos^2\varphi')$ gilt:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\varphi'}{D^3}\, d\varphi' = I_2 - \cos^2\varphi\,(2I_2 - I_0) \ .$$

Bei der Berechnung der im Kapitel 3.2. angegebenen Integrale ist I_j einfach durch $\int F(\alpha)\cos^j\alpha\, d\alpha$ zu ersetzen.

Anhang 4

In diesem Anhang soll die im Kapitel 5 gefundene Abhängigkeit der Verzeichnungskoeffizienten von einer Dejustierung bei Ablenksystemen theoretisch begründet werden. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird hier nur der Spezialfall diskutiert, daß die Zentralbahn des Bündels mit den Anfangsbedingungen $x_s \neq 0$; $y_s = 0$ senkrecht zur Ebene $z = z_s$ eintritt und infolgedessen in der (x,z)-Ebene verläuft. In diesem Fall erhalten wir die Bahngleichung (Kasper, 1979):

$$x''(z) = \sqrt{\frac{e(1+x'^2)}{2m_0U^*}} \quad [(1+x'^2)\, B_y(x,0,z)] \; .$$

Eine Entwicklung von $B_y(x,0,z)$ für y=0 nach Potenzen von x kann wegen der vorausgesetzen Symmetrie $B_y(x,0,z) = B_y(-x,0,z)$ in der Form:

$$B_y = I\,[B(z) + x^2\, Q(z) + x^4\, P(z) + O(x^6)]$$

geschrieben werden. $I \cdot B(z)$ ist die Ablenkfeldstärke auf der Achse. Zur Lösung der Bahngleichung machen wir folgenden Ansatz:

$$x(z) = x_s + x_b(z) + \delta x(z) \; .$$

Dabei ist

$$x_b(z) = -\sqrt{\frac{e}{2m_0U^*}} \int_{z_s}^{z} (z'-z)\, B(z')\, dz'\; I$$

die Lösung der linearisierten Bahngleichung $x_b'' = \sqrt{e/(2m_o U^*)}\, B(z) \cdot I$ mit den Anfangsbedingungen $x_b(z_s)=x_b'(z_s)=0$. Wir definieren folgende Abkürzung:

$$\xi(z) := x_b(z) / I \quad .$$

Da in der Registrierebene $z=z_b$ $x_b(z_b)=d(x_s)\cdot I$ gilt, folgt:

$$d(0) = -\sqrt{\frac{e}{2m_o U^*}} \int_{z_s}^{z_b} (z-z_b)\, B(z)\, dz \quad .$$

Wir entwickeln die Bahngleichung bis zur dritten Potenz in x bzw. x' und erhalten:

$$\begin{aligned} \delta x''(z) = \sqrt{\frac{e}{2m_o U^*}} \; \Big\{ & [Q(z)\, x_s{}^2]\, I \\ & + [2Q(z)\xi]\, x_s\, I^2 \\ & + [Q(z)\xi^2 + \tfrac{3}{2}B(z)\xi'^2]\, I^3 \\ & + \; O(I^4) \Big\} \quad . \end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Integration speziell:

$$d_2 = - x_s \sqrt{\frac{2e}{m_o U^*}} \int_{z_s}^{z_b} (z-z_b)[Q(z)\xi]\, dz + O(x_s{}^3) \, .$$

Bei der Weiterführung dieser Entwicklung wird ersichtlich, daß alle geraden Verzeichnungskoeffizienten in erster Näherung proportional zu x_s sind. Für die ungeraden Verzeichnungskoeffizienten und für d erfolgt eine zu $x_s{}^2$ proportionale Korrektur. Bei den Beispielen im Kapitel 5 hat diese Korrektur jedoch keine nennenswerte Rolle mehr gespielt.

Lebenslauf

14.9.54	geboren in Onstmettingen als Sohn des Hans-Richard Scherle und der Ella-Hilde Scherle geb. Stöck.
1961-65	Besuch der Volksschule in Onstmettingen.
1965	Eintritt in die Realschule Tailfingen.
1966-70	Besuch der Realschule Hechingen mit Abschluß am 10.6.1970.
1970-73	Besuch des Technischen Gymnasiums in Reutlingen mit Abschluß am 26.5.1973. Vorschlag und Aufnahme in die Studienstiftung des deutschen Volkes.
1973-75	Wehrdienst in einer technischen Einheit.
1975	Aufnahme des Studiums der Physik an der Universität Tübingen im Wintersemester.
1978-79	einjähriger Studienaufenthalt an der Universität Berkeley (USA), gefördert durch die Fulbright-Kommission.
ab 1979	Weiterführung des Studiums an der Universität Tübingen.
2.5.80	Eheschließung mit Sibylle Katherina geb. Blessing
12.10.80	Geburt der Tochter Cornelia
2.9.81	Physik-Diplom.
1981-83	Arbeit an der Dissertation "Berechnung von magnetischen Ablenksystemen" unter Anleitung von Herrn Prof. Dr. E. Kasper
seit 1.1.82	Wissenschaftlicher Angestellter am Lehrstuhl für Theoretische Elektronenphysik der Universität Tübingen.
8.8.83	Geburt des Sohnes Jörg

Meine akademischen Lehrer waren die Herren Professoren und Dozenten:

in Tübingen:

Baumann, Dittrich, Ebert, Fässler, Gaukler, Hübener
Kasper, Kramer, Krüger, Lenz, Lindner, Mack,
Möllenstedt, Schief, Speidel, Sohr, Strähle
und Stumpf;

in Berkeley:

Jackson, Kaufman, Kittel, Shen und Trilling.

Sprint-Druck GmbH
7000 Stuttgart 30
Wiener Str. 117
Tel. 0711/81 26 69

Sprint-Druck GmbH
7000 Stuttgart 30
Wiener Str. 117
Tel. 0711/81 26 69